Mecánica

Cinemática y dinámica

Albert Gras Martí

Con la colaboración de:
Azalea Gras Velàzquez

Con la colaboración gráfica de:
Julio V. Santos Benito

PID_00166262



Índice

Introducción

La física es la ciencia que estudia los fenómenos naturales e intenta encontrar las leyes que los rigen. Para facilitar el análisis de los fenómenos y de los procesos físicos, éstos se suelen dividir en mecánicos, térmicos, electromagnéticos, ópticos, nucleares, cuánticos, etc.

Dentro de la física, la mecánica es una parte fundamental porque estudia los movimientos y sus causas. Los conceptos y las leyes que formula la mecánica son básicos en todas las otras ramas de la física y también en la ingeniería.

La mecánica se suele dividir en **cinemática** y en **dinámica**. Se denomina *cinemática* la parte de la mecánica que estudia cómo analizar y describir los movimientos de los objetos. Se denomina *dinámica* la parte que estudia las causas que producen los movimientos y las leyes que los rigen.

Desde épocas remotas la humanidad se interesó por cómo podía describir los movimientos de los astros y los movimientos de los objetos sobre la Tierra. Hoy en día estamos acostumbrados al hecho de que los movimientos se puedan medir o controlar, por ejemplo con radares en las carreteras, con sistemas de posicionamiento global (GPS) para orientarnos o con el cuentakilómetros de los coches. Puede que no lo sepáis, pero el uso del GPS se sirve de conceptos de física muy sofisticados, de la denominada *física relativista*, que la humanidad ha tardado muchos siglos en desarrollar y entender.

En el estudio de la mecánica comenzaremos proponiendo cuestiones cualitativas sobre fenómenos y conceptos más o menos cercanos a la experiencia diaria de todos nosotros. Posteriormente, formalizaremos los conceptos y enunciaremos las leyes de la mecánica. A continuación los vamos a utilizar para la descripción de diferentes fenómenos o procesos. La primera aproximación será, pues, puramente cualitativa (descriptiva, informal), para ir llegando poco a poco a una aproximación científica formal.

En el primer apartado abordaremos el estudio de la cinemática desde un punto de vista cualitativo y en el segundo apartado formalizaremos conceptos básicos como la velocidad y la aceleración.

Los apartados 3 y 4 los dedicaremos a la dinámica: el tercero lo abordaremos en términos descriptivos y en el cuarto enunciaremos las tres leyes de movimiento de Newton.

En el apartado 5 introduciremos conceptos de uso en la mecánica y en toda la física, como el momento lineal y la energía en sus distintas formas (cinética, potencial, mecánica), y en el apartado 6 estudiaremos un tipo de movimiento concreto, el movimiento oscilatorio, y aprovecharemos para aplicar al mismo los conceptos y las leyes que veremos a lo largo del módulo de mecánica.

Estructura de estos materiales de trabajo

A lo largo de los apartados de este módulo de mecánica se proponen *actividades* que deberéis hacer. Se trata tanto de ejemplos de aplicación de la teoría como de elementos necesarios para desarrollar la materia en sí misma. Son actividades diseñadas para teneros activos mientras estudiáis y son esenciales para poder continuar trabajando con provecho los materiales. Las soluciones a todas las actividades están justo a continuación de cada enunciado, pero el proceso de enseñanza-aprendizaje es mucho más eficiente si trabajáis a fondo estas actividades (y por escrito) antes de comparar vuestra solución con la del texto. En repasos posteriores de la materia veréis que podéis responder a las cuestiones planteadas en las actividades sin necesidad de leer las soluciones.

Al final de cada apartado se proponen también problemas de ampliación que permiten mejorar la comprensión de los principios básicos y desarrollar habilidades de análisis y de resolución de problemas. Tenéis las respuestas al final del módulo de mecánica. No conviene que los abordéis en una primera lectura si no disponéis de suficiente tiempo, aunque sí en repasos posteriores.

Y, además, al final del módulo hay ejercicios cualitativos de autoevaluación que os ayudarán a comprobar vuestros progresos.

Objetivos

A partir del trabajo de este módulo, los estudiantes seréis capaces de alcanzar los objetivos siguientes:

1. Saber aplicar los lenguajes de la ciencia (verbal, algebraico, gráfico, tabular, etc.) para describir y abordar problemas de movimientos y sus causas.

2. Saber emplear las herramientas del cálculo integrodiferencial para la resolución de problemas de mecánica.

3. Saber aplicar el cálculo vectorial para la descripción de magnitudes cinemáticas y dinámicas.

4. Conocer y saber aplicar los conceptos físicos básicos de la mecánica: velocidad, aceleración, fuerza, trabajo, energía, momento lineal, etc.

5. Conocer las leyes de Newton de la mecánica, y saberlas aplicar a situaciones de interés en ingeniería.

6. Saber describir la cinemática y la dinámica del movimiento oscilatorio.

7. Saber interpretar gráficas cualitativas de movimientos y generar gráficas cuantitativas de movimientos a partir de las ecuaciones correspondientes.

1. Descripción de los movimientos. Los lenguajes de la ciencia

El objetivo principal de este apartado es hacer un tratamiento cualitativo de los movimientos que observamos o que se pueden provocar.

> La mecánica es la parte de la física que estudia los movimientos, tanto en su descripción, la cinemática, como en las causas que los producen, la dinámica.

Nos introduciremos en la cinemática a partir de descripciones cualitativas de los movimientos, para adentrarnos poco a poco en cuestiones cuantitativas. Son tan importantes las descripciones cualitativas de los fenómenos de la naturaleza como las cuantitativas.

¿Qué aprenderemos?

- Aprender ciencia es aprender los lenguajes de la ciencia.
- Plantearemos problemas y haremos análisis que formalizaremos en apartados posteriores.
- Veremos la utilidad de cuatro tipos de lenguajes en la descripción de movimientos: el verbal, el algebraico, el gráfico y el tabular.
- Clasificaremos los movimientos según criterios diversos.
- Mencionaremos las simulaciones por ordenador como herramientas que permiten investigar procesos físicos.

Cualitativo y cuantitativo

Una descripción cualitativa emplea el lenguaje verbal y esquemas que muestran las tendencias de las variables que intervienen.

En una descripción cuantitativa se emplean con precisión conceptos y expresiones matemáticas (fórmulas, ecuaciones), además de tablas o gráficos con valores numéricos de las magnitudes involucradas.

¿Qué supondremos?

Los conceptos matemáticos básicos que necesitaremos para estudiar los movimientos los recordaremos brevemente a medida que se vayan necesitando. Así, por ejemplo, repasaremos los conceptos matemáticos de división, proporcionalidad y valor medio.

1.1. Lenguaje verbal

Comenzamos con un ejemplo sencillo y cotidiano: describiremos en términos físicos una tarea habitual, un movimiento arriba y abajo por unas escaleras. Imaginemos una persona que vive en el segundo piso de un edificio sin ascensor, y que sube en diversos viajes las bolsas que trae del mercado y que tiene en el coche. Al acabar la tarea habrá subido y bajado unas cuantas veces las

escaleras de su casa. Desde el punto de vista de los movimientos que se han hecho en esta tarea podemos decir que:

- ha hecho fuerza para alzar las bolsas;
- ha recorrido una determinada distancia;
- cuando ha subido y bajado las escaleras ha acabado en la misma posición: en el coche;
- ha bajado las escaleras con más rapidez (habitualmente) de lo que las ha subido;
- se ha cansado: ha consumido energía;
- ha hecho un "esfuerzo" (subir cosas, subir y bajar su propio cuerpo);
- ha tardado un tiempo en completar todo el proceso.

Además, si comparamos la tarea que ha hecho esta persona con la de otra que haya hecho una tarea parecida podremos comparar, por ejemplo, el tiempo total que cada uno ha tardado en hacer su tarea o la velocidad con que subían y bajaban las escaleras.

Por tanto, la descripción de un movimiento cualquiera puede involucrar muchos términos, como la velocidad, la posición, la distancia recorrida, la energía o la fuerza. Todos estos términos designan magnitudes.

Las magnitudes son propiedades de los sistemas físicos que se pueden *medir*.

Las magnitudes se pueden cuantificar mediante un número y una unidad específica, una vez que se haya acordado la escala de medida respectiva. Por ejemplo, podemos medir una velocidad en kilómetros por hora, o en metros por segundo.

Recordad

No es posible aprender física sólo con leer estos materiales. Conviene tratar de resolver, y por escrito, cada actividad que se plantee. Estas actividades no son sólo ejercicios de aplicación sino que a menudo son parte fundamental del proceso de construcción del tema que se está estudiando en cada caso, y no es posible avanzar sin entenderlos.

Conceptos como los mencionados –fuerza, energía, velocidad, etc.– se utilizan tanto en la vida cotidiana, de manera coloquial, como en usos científicos; debemos aprender a emplearlos con precisión en contextos cientificotécnicos. Deberemos inventarnos otros conceptos para poder describir de forma más completa un movimiento y, así, hablaremos de aceleraciones, de trabajo, de potencia, etc. Los vamos a ir definiendo poco a poco.

Actividad 1.1. Hacemos otra descripción

Una persona se sube a un coche y lo conduce, hasta que en algún momento lo aparca. ¿Qué conceptos de los que hemos mencionado en la actividad anterior se aplicarán para describir este movimiento? ¿Qué otros conceptos se pueden aplicar?

Solución

Se pueden emplear algunos términos que hemos utilizado en la descripción anterior y, además, los siguientes:

- la aceleración del coche que provocamos con el pedal acelerador;
- la frenada del vehículo;
- la fricción de las ruedas.

Seguramente algunos de vosotros tendréis listas más largas, que incluyan quizás el efecto del viento sobre el movimiento del coche. Una de las tareas de la ciencia es definir bien y delimitar el problema que se quiere abordar, porque de lo contrario no se puede avanzar en la resolución del problema planteado. En cada caso deberemos precisar en qué aspectos del proceso queremos fijarnos.

1.1.1. ¿Qué hemos aprendido?

Vemos que un par de ejemplos de acciones cotidianas, como subir bolsas a casa o conducir un vehículo, han hecho aparecer ya muchos conceptos que habrá que precisar si queremos describir estos movimientos en términos científicos.

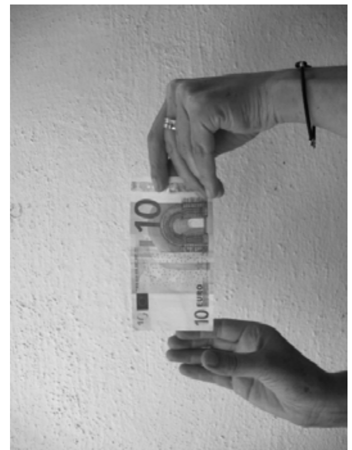
Como hemos visto, los movimientos o los procesos se pueden describir cualitativamente. La descripción cuantitativa de estos movimientos o procesos a menudo se hace mediante fórmulas que expresan relaciones entre las magnitudes involucradas. En el subapartado siguiente veremos un ejemplo.

1.2. Lenguaje algebraico: ecuaciones del movimiento

Ahora veremos un ejemplo concreto de movimiento, el **movimiento de caída libre**, el que se produce cuando un objeto cae al suelo. El conocimiento de la ecuación que describe la caída libre nos permitirá discutir consecuencias interesantes de este movimiento.

Podéis hacer el experimento siguiente: una persona A sujeta entre los dedos pulgar e índice un billete de 10 euros por un extremo y lo cuelga verticalmente entre los dedos pulgar e índice de otra persona, B, que los tiene bien abiertos. El extremo inferior del billete está a la altura de los dedos abiertos de B (figura 1). Se trata de que A suelte el billete y de que B intente atraparlo cerrando los dedos, pero sin mover la mano hacia arriba o hacia abajo: sólo puede cerrar el pulgar y el índice, una vez que A haya soltado el billete. Se puede apostar que si B atrapa el billete, se lo queda, y lo pierde, en caso contrario.

Figura 1



Se suelta un billete, sin avisar, entre los dedos pulgar e índice de la mano de otra persona, que intentará atraparlo.

Si hacéis el experimento de manera que A suelte el billete sin mirar a B (así B no puede intuir cuándo lo va a soltar), casi siempre ocurre que B no es capaz de atraparlo.

El análisis de este experimento se puede dividir en dos partes: el movimiento de caída del billete y la respuesta de la persona que intenta atraparlo. La segunda parte es más difícil de analizar, porque involucra conceptos fisiológicos y físicos complejos de B, que debe ver cuándo A suelta el billete, dar a su cerebro la orden de cerrar los dedos, enviar un impulso nervioso a los dedos para que se cierren, etc.

Supongamos que todos los procesos fisiológicos anteriores se pueden hacer, típicamente, en un intervalo de tiempo t_B. Supongamos también que el tiempo de caída del billete entre los dedos de B es t_A.

Si $t_B > t_A$, B no atrapará el billete. Es decir, si la reacción de una persona es más lenta que el tiempo que tarda el billete en caer entre los dedos de la mano de B, éste no podrá atraparlo. Si repetís el experimento unas cuantas veces y con diversas personas, comprobaréis que (si no hacen trampa, como cerrar los dedos antes de que se suelte el billete) casi nunca lo atrapan. Pocas personas, sólo las que tengan muy buenos reflejos, lo atraparán.

$t_B > t_A$ significa que t_B es más grande que t_A.

¿De qué depende el tiempo de caída del billete t_A? Este tiempo lo determinan procesos físicos, no fisiológicos. El tiempo t_A depende de:

- la acción de la gravedad, que hace caer el billete;
- su longitud (un billete grande tardará más en pasar entre los dedos).

Veamos cómo podemos calcular el tiempo t_A.

1.2.1. Tiempo de caída libre

Hay una expresión que facilita la discusión cuantitativa del experimento que muestra la figura 1. Resulta que el tiempo t_A que tarda un billete de longitud L que cae libremente al pasar entre los dedos de una mano se puede calcular mediante la expresión siguiente:

$$t_A = \sqrt{\frac{2L}{g}} \qquad (1)$$

donde L es la longitud del billete y la constante g = 9,81 m/s^2 es la *aceleración de la gravedad*. En el apartado 2 aprenderemos a deducir ecuaciones como ésta, que se denomina ecuación de movimiento. Es la ecuación de movimiento de un objeto que cae libremente.

Para un billete de 10 euros (L = 12,7 cm), obtenemos:

$$t_A = 0{,}16 \text{ s} \qquad (2)$$

es decir, el tiempo de caída del billete entre los dedos de B es de menos de dos décimas de segundo; exactamente, 1,6 décimas de segundo, o 16 centésimas de segundo.

Puesto que si hacemos el experimento observamos que t_B es superior a t_A en la mayor parte de los casos, $t_B > t_A$, podemos concluir que para la mayoría de per-

sonas el tiempo de respuesta ante un estímulo, o *tiempo de reacción*, es de algunas décimas de segundo y superior a 0,16 s; también podemos decir que éste es el tiempo mínimo que tardamos en reaccionar si, por ejemplo, estamos conduciendo y nos vemos obligados a frenar repentinamente, o a echar a correr cuando alguien nos hace una señal.

Veamos qué consecuencias tiene el tiempo de reacción con un ejemplo.

Actividad 1.2. Reflejos de un conductor

Vais conduciendo por la ciudad a 36 km/h y se cruza una persona por delante del coche. ¿A qué distancia mínima se debe cruzar para que no lo atropelléis inevitablemente, aunque frenéis rápidamente?

Suponed que el tiempo de respuesta es 0,16 s.

La distancia d recorrida por un vehículo que va a velocidad v durante un tiempo t es $d = v \cdot t$. Por ejemplo, a 30 km/h, en 4 h recorreríamos 4 h × 30 km/h = 120 km.

Solución

Para analizar esta situación podemos suponer que nuestra respuesta es "instantánea", es decir, que no vamos charlando con el copiloto o hablando por el móvil, y que el coche también responde instantáneamente, de manera que cuando frenamos se detendrá en seco, sin deslizarse.

Calculamos qué distancia recorre el coche durante el tiempo que una persona necesita para responder al estímulo. Si circulamos a una velocidad v, el espacio que recorremos en este tiempo es:

$$Distancia = Velocidad \times Tiempo = v \cdot t \qquad (3)$$

Dado que tomamos el tiempo de respuesta como 0,16 s, conviene convertir la velocidad del vehículo a metros por segundo:

$$36\frac{\text{km}}{\text{h}} = 36\frac{1.000\ \text{m}}{60\ \text{min} \times 60\ \frac{\text{segundos}}{\text{min}}} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (4)$$

Observemos que en la conversión de unidades hemos operado con las unidades (m, min, s) de la misma manera que con las cifras: se pueden dividir, multiplicar, simplificar, etc. Además, hemos hecho intervenir factores de conversión para pasar de km a m, de horas a minutos y de minutos a segundos: esto permite saber qué estamos haciendo en cada paso y no equivocarnos.

A 10 m/s, la distancia recorrida en el tiempo t_A = 0,16 s es, según la ecuación (3):

$$Distancia = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0{,}16\ \text{s} = 1{,}6\ \text{m} \qquad (5)$$

Es decir, el coche se desplazará unos 2 metros desde el momento en que advertimos que hemos de accionar el freno hasta que el coche se detiene. Debemos tener presente este hecho, que es inevitable por buenos reflejos que tengamos. Si el peatón aparece delante del coche a menos de 2 m y circulamos a 36 km/h o más, no podremos evitar el atropello.

Ahora podemos analizar la dependencia del tiempo de caída del billete en función de su longitud.

Actividad 1.3. Un billete diferente

a) Comprobad el cálculo de t_A para el billete de 10 euros, ecuación (2).

b) Una persona dice que si el billete tuviese longitud doble, el tiempo de caída sería doble. ¿Es eso cierto?

Solución

a) Para un billete de 10 euros (L = 12,7 cm), obtenemos, de la ecuación (1):

$$t_A = \sqrt{\frac{2 \times 12{,}7\ \text{cm}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{\frac{2 \times 12{,}7\ \text{cm}}{981\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}} = 0{,}16\ \text{s} \qquad (6)$$

Fijémonos, de nuevo, en que hemos tenido que convertir los metros en centímetros y en que en la segunda raíz hemos simplificado cm/cm = 1 y $\sqrt{\text{s}^2} = \text{s}$. Operamos con las unidades de la misma manera que con los números.

b) Si el billete tiene longitud doble, $L = 2 \times 12{,}7$ cm, obtenemos $t_A = 0{,}226$ s, que no es el doble de tiempo que en el caso anterior. Doble longitud del billete no se traduce en doble tiempo de caída. En el subapartado 1.6.3. analizamos en qué condiciones se cumple que si la variable independiente se duplica, la función también lo hace.

Variables dependientes e independientes

En una función $y = f(x)$, x es la variable independiente, porque puede tomar cualquier valor dentro del intervalo de definición de la función. y es la variable dependiente, que tomará los valores que de la función $f(x)$.

1.2.2. ¿Qué hemos aprendido?

Magnitudes

Las ecuaciones relacionan *magnitudes*, es decir, propiedades de los objetos o de los procesos que se pueden medir, como el tiempo, la longitud, la velocidad, la aceleración, etc.

En esta discusión hemos introducido los términos siguientes:

- tiempo de reacción;
- aceleración de la gravedad, *g*;
- ecuación de movimiento.

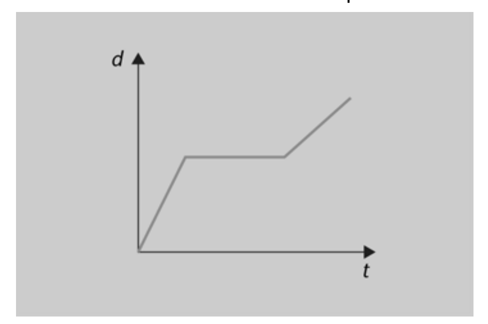
Para analizar los movimientos resulta útil conocer la relación entre el espacio recorrido y el tiempo que se tarda en recorrerlo. Esta relación se denomina *ley o ecuación de movimiento*.

Hemos descrito movimientos mediante lenguajes verbales y algebraicos (en forma de ecuaciones). Veamos ahora algunos usos del lenguaje gráfico.

1.3. Lenguaje gráfico: representaciones de movimientos

Los fenómenos físicos o naturales se pueden describir con la ayuda de esquemas y gráficas. Las gráficas representan variaciones de determinadas magnitudes y pueden ser cualitativas o cuantitativas. En una representación cualitativa se muestran tendencias sin necesidad de precisar los valores de las magnitudes que se representan. Observad la figura 2.

Figura 2. Gráfica cualitativa del desplazamiento de un vehículo en función del tiempo



La figura 2 es un ejemplo de gráfica cualitativa del desplazamiento de un vehículo en función del tiempo. Indica que el vehículo se desplaza durante un tiempo, porque la variable *d* aumenta a medida que aumenta *t*; a partir de un instante determinado el vehículo se detiene, es decir, está en el mismo punto durante un intervalo de tiempo, porque el desplazamiento se mantiene constante y, de repente, comienza a desplazarse de nuevo, a partir del punto en que la recta pasa de ser horizontal a inclinada.

Como vemos en la figura 2, en los extremos de los ejes de coordenadas se suele dibujar una flecha, con el fin de indicar en qué sentido aumentan los valores de las variables.

Las gráficas también pueden ser cuantitativas, cuando la abscisa y la ordenada muestran valores de las magnitudes que se representan, como en la figura 3. La gráfica 3 corresponde al movimiento de un vehículo que se detiene durante un intervalo de tiempo, como en la figura 2. Las transiciones suaves entre las tres rectas de la figura 3 son más próximas a lo que ocurre en la realidad que los cambios bruscos de la figura 2.

Conviene notar que, aunque solemos emplear unos símbolos específicos para referirnos a magnitudes concretas (como *t* para el tiempo o *v* para la velocidad), esto no siempre es posible porque hay más magnitudes que letras; a menudo, la notación que se utiliza varía según el autor de la gráfica. Nos hemos de fijar siempre en lo que dice el texto o el pie de figura, para saber de qué magnitudes estamos hablando. En las figuras 2 y 3, por ejemplo, tanto *d* como *D* representan un desplazamiento.

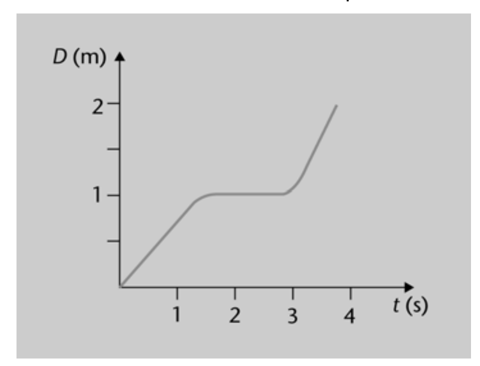
En general, hemos de saber qué se representa en una gráfica, qué **magnitudes**, y qué valores tienen, y en qué **unidades** se miden estas magnitudes.

En cualquier representación gráfica, cualitativa o cuantitativa, es fundamental que especifiquemos las magnitudes que se representan. En una representación cuantitativa debemos especificar también las unidades con las que medimos las variables.

En la figura 3 el desplazamiento se mide en metros y el tiempo en segundos.

El análisis del movimiento descrito por la gráfica de la figura 3 se parece al de la figura 2, pero ahora podemos especificar los valores de las magnitudes: el movimiento empieza a contar desde el instante $t = 0$ y un desplazamiento $D = 0$; durante un poco más de 1 s el vehículo ha recorrido alrededor de 1 m; el vehículo se ha detenido a una distancia de 1 m de la posición inicial, aproximadamente entre los instantes de tiempo 1,5 s y 3 s, y después se ha vuelto a mover y se ha desplazado hasta llegar a unos 2 m después de 4 s.

Figura 3. Gráfica cuantitativa del desplazamiento de un vehículo en función del tiempo



El segundo tramo inclinado de la figura 3 corresponde a un movimiento más rápido, porque se recorre la misma distancia que en el primer tramo (aproximadamente 1 m) en menos tiempo (menos de un segundo); el primer tramo se hace en más de un segundo. Por tanto, la velocidad del vehículo es mayor cuando reinicia el movimiento, después de estar parado entre $t \approx 1{,}5$ s y $t = 3$ s.

≈, aproximadamente

La expresión:

$t \approx 2{,}5$ s

se lee de la siguiente manera: "*t* es aproximadamente igual a dos coma cinco segundos."

En conclusión, podemos decir que, en una gráfica desplazamiento-tiempo, **velocidad** y **pendiente** de la recta están relacionadas, y que una línea horizontal corresponde a una **velocidad nula**.

Una recta que tiene mayor pendiente en una gráfica desplazamiento-tiempo para un objeto en movimiento, corresponde a un movimiento del objeto a una velocidad mayor. Una recta horizontal en una gráfica desplazamiento-tiempo corresponde a un objeto que está parado porque la posición no varía con el tiempo.

Es muy importante para un ingeniero aprender a interpretar gráficas. Las gráficas son representaciones de funciones matemáticas y, a la inversa, una representación gráfica se puede expresar en términos de una función matemática más o menos complicada. Comencemos por las gráficas de las funciones que permiten describir los movimientos más básicos.

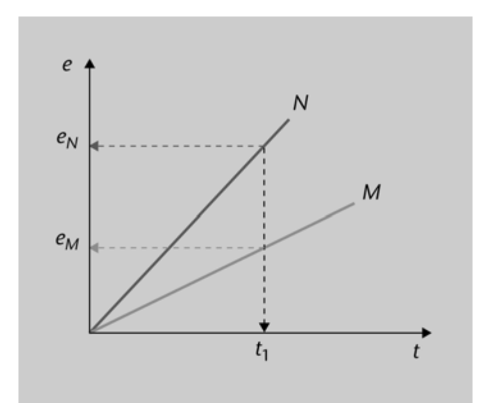
1.3.1. Gráficas lineales

Para un vehículo que se mueve a la velocidad constante v, podemos decir que el espacio e recorrido por el vehículo en un tiempo t es:

$$e = v \cdot t \tag{7}$$

Si representamos cualitativamente esta ecuación en unos ejes cartesianos, e, t, obtenemos una recta, cuya pendiente está relacionada con la velocidad del objeto (figura 4).

Figura 4. Gráfica espacio-tiempo para dos movimientos a velocidad constante



En la gráfica de la figura 4 la velocidad del objeto en el caso N és mayor que en el caso M, porque para un mismo tiempo t_1 el objeto ha recorrido en el caso M menos espacio (e_M) que en el caso N (e_N). Como ya habíamos visto en la discusión de la figura 3, **pendiente** y **velocidad** están ligadas.

> En una gráfica espacio-tiempo, una línea recta indica una velocidad constante y una pendiente mayor de la recta indica una velocidad mayor.

De acuerdo con la expresión (7), si $t = 0$, $e = v \cdot 0 = 0$. Por eso las rectas de la figura 4 pasan por el origen de coordenadas; en el instante $t = 0$ el espacio recorrido es nulo, es decir, comenzamos a medir los espacios recorridos desde un instante $t = 0$ que denominamos *instante inicial*.

> El **instante inicial** es el momento a partir del cual comenzamos a contar el tiempo transcurrido en un movimiento.

Pongamos en práctica estas ideas.

Actividad 1.4. Rectas en gráficas desplazamiento-tiempo

¿En qué momento se mueve más rápidamente el objeto que se desplaza según la gráfica de la figura 2?

Solución

El desplazamiento del móvil de la figura 2 se hace a velocidad constante durante un tiempo porque la representación $d(t)$ es inicialmente una recta que tiene una inclinación determinada; después de estar parado un tiempo, el objeto vuelve a moverse a una velocidad constante aunque menor, porque la pendiente de la segunda recta inclinada es menor que la de la primera.

Las líneas rectas son las funciones matemáticas más sencillas. Recordémoslo.

Sabemos que una ecuación como $e = v \cdot t$ o, en general:

$$y(x) = m \cdot x \qquad (8)$$

representa una recta que pasa por el origen y responde a una proporcionalidad directa entre las magnitudes y y x, como demostraremos a continuación. Es decir, si multiplicamos la variable independiente por una constante c_1, por ejemplo, obtenemos c_1x y la función se multiplica por el mismo valor c_1:

$$y(c_1x) = c_1 \cdot y(x) \tag{9}$$

La notación $y(c_1x)$ significa que calculamos la función de la ecuación (8) sustituyendo x por c_1x. La expresión (9) se lee de la manera siguiente: "el valor de la función y en el punto c_1 por x es igual a c_1 por el valor de la función en x".

Variables, funciones, constantes y parámetros

En una función $y(x)$ la variable independiente, x, puede tomar cualquier valor. La variable dependiente y toma el valor que resulta de calcular la función para aquel valor de x.

En la ecuación (8) m es un parámetro, un valor constante para cada recta, que no depende de las variables x ni y.

Demostración

En efecto, si sustituimos x por c_1x en la expresión (8) obtenemos:

$$y(c_1x) = m \cdot (c_1x) \tag{10}$$

y si tenemos en cuenta que en un producto de varios factores podemos eliminar los paréntesis y reordenar los factores gracias a las propiedades distributiva y commutativa del producto, obtenemos:

$$y(c_1x) = c_1 \cdot (mx) = c_1y(x) \tag{11}$$

De esta manera hemos demostrado que la expresión (9) es correcta.

Las funciones lineales o las representaciones gráficas en forma de línea recta aparecen a menudo en ciencia y en ingeniería. Las expresiones (7) u (8) son matemáticamente idénticas, sólo hemos cambiado el nombre de las variables dependiente e independiente.

Una expresión como la (7) o la (8) no sirve para representar el último tramo del movimiento que se indica en la figura 2 o la figura 3, porque la recta correspondiente no pasa por el origen. Recordemos cómo se representan analíticamente las rectas en la forma más general.

Actividad 1.5. Expresión general de una recta

a) Si escribimos la función $y(x)$ siguiente:

$$y = m \cdot x + n \tag{12}$$

¿qué representan m y n? ¿Son proporcionales las magnitudes y y x? (es decir, si, por ejemplo, se duplica la magnitud x, ¿se duplicará también la magnitud y?).

b) Y si escribimos la función $e(t)$ siguiente:

$$e = c \cdot t + d \tag{13}$$

donde t es el tiempo y e la posición de un vehículo, ¿qué representan c y d? Si triplicamos el tiempo, ¿se triplica la distancia recorrida por los vehículos?

Pendiente y ordenada en el origen

La expresión de una función lineal:

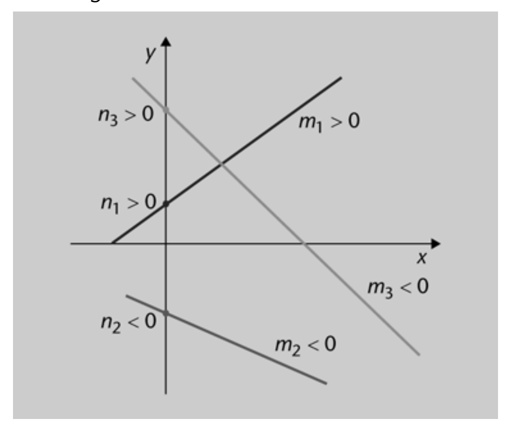
$$y = m \cdot x + n$$

gráficamente representa una recta de pendiente m y de ordenada en el origen n.

Solución

a) La función (12) se denomina función lineal porque su representación gráfica es una línea recta (figura 5).

Figura 5. Representación de funciones lineales para valores diferentes de la pendiente y de la ordenada en el origen



El parámetro *m* se denomina *pendiente de la recta* y coincide con el valor de la derivada de la función:

$$dy / dx = m \tag{14}$$

El parámetro *n* se denomina *ordenada en el origen*, porque es el valor de la función $y(x)$ cuando $x = 0$:

$$y(0) = m \cdot 0 + n = n \tag{15}$$

Las magnitudes *y* y *x* no son proporcionales porque si, por ejemplo, duplicamos el valor de la abscisa, no se duplica el valor de la ordenada, $y(2x) \neq y(x)$. En efecto, el doble del valor de la función para *x* vale:

$$2y(x) = 2mx + 2n \tag{16}$$

mientras que el valor de la función para el doble de *x* es:

$$y(2x) = m(2x) + n = 2mx + n \tag{17}$$

Vemos que los resultados (16) y (17) son diferentes, porque el término independiente es diferente.

b) *c* es la pendiente de la recta; en este caso es la velocidad del vehículo.

d es el valor de la posición cuando $t = 0$, es decir, la posición del vehículo en el "instante inicial".

Las distancias recorridas no son proporcionales al tiempo que ha transcurrido: la distancia recorrida para un tiempo $t = t_1$ es:

$$e(t_1) = ct_1 + d \tag{18}$$

y para un tiempo $t = 3t_1$:

$$e(3t_1) = 3ct_1 + d \tag{19}$$

que *no* es el triple del valor (18):

$$3 \cdot e(t_1) = 3(ct_1 + d) = 3ct_1 + 3d \tag{20}$$

Fijémonos en el término independiente, $3d$, en la expresión (20), diferente del valor *d* de la ecuación (19).

Por lo tanto, la presencia de la constante *n* en la expresión $y = m \cdot x + n$, o de *d* en $e = c \cdot t + d$, hace que las funciones lineales $y(x)$ o $e(t)$ no representen magnitudes proporcionales.

Derivadas

La derivada de una función $y(x)$ respecto de la variable *x* se escribe:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

y la derivada segunda se escribe:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Las mismas expresiones valen para funciones vectoriales.

Veamos otro ejemplo de construcción y de interpretación de gráficas. Representamos en forma cualitativa la tarea analizada en el ejemplo del subapartado

1.1, la persona que sube y baja las escaleras. En términos del recorrido que ha seguido la persona en función del tiempo, obtenemos una gráfica como la indicada en la figura 6.

¿Qué se indica en la gráfica cuantitativa de la figura 6? Podemos observar diversas cosas:

Función monótona

Decimos que una función es monótona *creciente* cuando para valores crecientes de la variable independiente, la variable dependiente también crece.

Sin embargo, si $y(x)$ siempre decrece para x crecientes, la función es monótona *decreciente*.

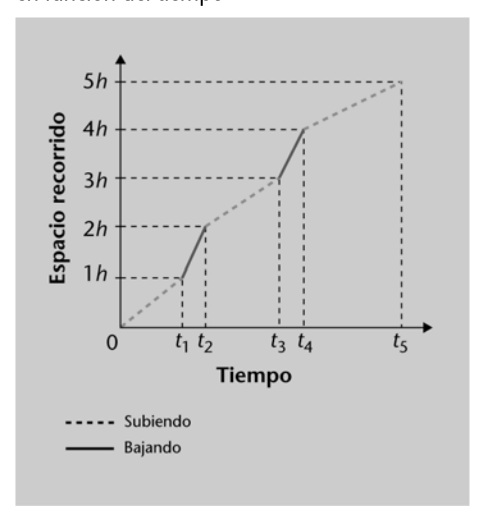
1) comenzamos a contar el tiempo y el espacio recorrido desde el valor 0, que corresponden al instante en que la persona está al pie de las escaleras y el espacio recorrido es nulo;

2) a medida que pasa el tiempo, el espacio recorrido es cada vez mayor; matemáticamente, diríamos que la función espacio-tiempo $e(t)$ es monótoma creciente;

3) los tramos rectos de la gráfica tienen pendientes diferentes y, por tanto, el movimiento se desarrolla a velocidades diferentes;

4) los cambios de pendiente siempre ocurren para los mismos valores de incremento de distancia recorrida, y corresponden a la longitud h de las escaleras;

Figura 6. Distancia recorrida para una persona que sube y baja una escalera, de longitud h, en función del tiempo



5) los intervalos de tiempo necesarios para recorrer la misma longitud de escalera son diferentes; por ejemplo, el tiempo t_1 que ha necesitado la persona para subir las escaleras la primera vez es mayor que el tiempo que ha tardado a bajarla la primera vez $(t_2 - t_1)$; el segundo tiempo de subida $(t_3 - t_2)$ es mayor que el tiempo que ha tardado la primera vez, t_1;

6) a medida que pasa el tiempo, los tramos de subida se hacen en más tiempo.

Estas observaciones deben explicarse. Veamos cómo podemos hacerlo.

Actividad 1.6. Interpretación de gráficas

a) ¿Cómo podemos interpretar lo que dice el punto 4 de la lista anterior?

b) Explicad las observaciones 5 y 6 de la lista anterior.

Solución

a) Podemos interpretar los cambios de pendiente como los puntos en los que la persona se encuentra abajo o arriba de las escaleras.

b) Lo que se dice en el punto 5 es de esperar, porque bajar las escaleras sin llevar peso en las manos suele hacerse más rápido que subiendo con peso en las manos.

Lo mismo ocurre con el punto 6 porque, por el motivo que acabamos de explicar, las velocidades de subida son menores que las de bajada. Como probablemente la persona se va cansando, el intervalo de tiempo que dura la tercera subida, $t_5 - t_4$, es más largo que el intervalo de tiempo que dura la segunda, $t_3 - t_2$, y éste es más largo que el tiempo que dura la primera subida, t_1.

En la gráfica cualitativa de la figura 6 se ha supuesto, por simplificar, que la persona sube y baja las escaleras a una velocidad constante y por eso aparecen líneas rectas en la gráfica desplazamiento-tiempo. Esta es una simplificación porque el movimiento descrito es bastante más complicado: la existencia de los escalones, por ejemplo, hace que no estemos subiendo la escalera de manera continuada sino a golpes.

En general, las gráficas de movimientos no siempre contienen sólo tramos lineales. Veamos un ejemplo.

Actividad 1.7. Descripción de un movimiento más complicado

Explicad qué tipo de movimiento se representa cualitativamente en la gráfica de la figura 6. En ordenadas se representa la posición de un objeto que se mueve en línea recta. La posición en cada instante se mide respecto al punto en el que comienza el movimiento.

¿Qué tipos de funciones sencillas podríamos describir en la parte ascendiente y la parte descendiente de la gráfica?

Figura 7. Gráfica posición-tiempo para el movimiento de un objeto a lo largo de una línea recta

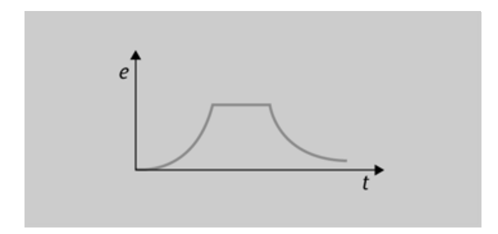


Figura 7

En la figura 7 se representan distancias en un punto sobre una recta. Habitualmente se designa la posición del objeto con la letra *x* medida sobre una recta pero, como se ha dicho antes, podemos utilizar cualquier símbolo siempre que lo definamos explícitamente.

Solución

El movimiento que se representa en la figura 7 es más complicado que el de los casos analizados hasta ahora. Se compone de una curva creciente que comienza en $e = 0$; al cabo de un tiempo, el desplazamiento se mantiene constante hasta que, por fin, se produce un retroceso que no acaba en el punto de partida, $e = 0$.

Se trata de un movimiento que se inicia en un punto y se produce a velocidad variable, no constante, hasta que al llegar a un punto, el objeto se detiene. Al cabo de un tiempo de estar detenido, el objeto se acerca de nuevo al origen a una velocidad no constante; por eso la posición del objeto toma valores cada vez más próximos al inicial, $e = 0$.

El móvil se halla en reposo en el tramo horizontal de la gráfica. La parte creciente podría ser una función potencial (por ejemplo, del tipo $e = a \cdot t^2$), y la decreciente una de tipo

potencial de exponente negativo, como $e = bt^{-n}$; la subida y la bajada también podrían ser funciones exponenciales e^{ct}, e^{-dt}. En los dos casos corresponden a movimientos hechos a velocidades variables, no constantes.

1.3.2. ¿Qué hemos aprendido?

- Es muy importante para el ingeniero saber elaborar y saber interpretar gráficas. Interpretar gráficas es un proceso complicado que se aprende con la práctica.

- Habitualmente solemos simplificar los procesos que queremos estudiar y, a continuación, si lo consideramos conveniente, podemos irlos sofisticando gradualmente (por ejemplo, en el movimiento por unas escaleras podemos tener en cuenta los escalones).

- Una gráfica lineal que pasa por el origen corresponde a una proporcionalidad directa entre las magnitudes que se representan.

- La pendiente de la recta *e*(*t*) (espacio recorrido en función del tiempo) da la velocidad del objeto.

Ya hemos visto diversos lenguajes de los que podemos servirnos para describir los movimientos: el lenguale verbal, el gráfico y el algebraico. Pero, ¿cuántos tipos de movimientos hay?

1.4. Tipos de movimientos

Si nos fijamos en los movimientos que podemos hacer o los que podemos observar en nuestro entorno, como caminar, volar, correr, viajar en algún vehículo, los diversos tipos de movimientos que se dan en las atracciones de un parque, el aletear de un ave, etc., veremos que todos pertenecen a uno de los tres tipos siguientes, o bien a una combinación de ellos:

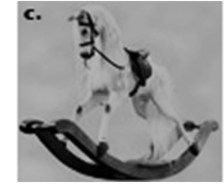
1) Translaciones
2) Rotaciones
3) Vibraciones

En la figura 8 vemos algunos ejemplos cotidianos de movimientos de translación (un vehículo que se desplaza), de rotación (una rueda de feria) y de vibración u oscilación (un caballito o un taladro).

Figura 8. Ejemplos de movimientos básicos









a. translación, **b.** rotación y **c.** y **d.** oscilación o vibración.

En una *translación* nos desplazamos de un punto del espacio a otro. El movimiento de translación es muy habitual, y puede ser en línea recta o no, y por la superficie de la Tierra o por el espacio o por el mar.

Las *rotaciones* están presentes en muchas atracciones de feria (el tiovivo, la noria, etc.) o en el movimiento de los astros (el Sol, la Tierra, la Luna, etc.); el giro de la Tierra sobre ella misma nos da el día y la noche, y la rotación de la Tierra alrededor del Sol y la inclinación del eje de rotación de la Tierra nos da las estaciones. A veces efectuamos giros parciales, como cuando vamos en bicicleta y doblamos una esquina entre dos calles.

Y, finalmente, hay *movimientos cíclicos*, en los que no hay desplazamientos arbitrarios ni se recorren círculos: es el movimiento de vaivén de, por ejemplo, los troncos de los árboles o de los rascacielos cuando hace viento, el movimiento pendular de un reloj antiguo o las oscilaciones de un vehículo en movimiento debido a los amortiguadores. En estos casos, el objeto se mueve hacia un lado y hacia el otro con respecto a una posición inicial, sin que haya translación ni rotación.

En un movimiento de **translación** la partícula se separa del punto de partida y efectúa un recorrido cualquiera.

En un movimiento de **rotación** la partícula da vueltas alrededor de un punto central.

En un movimiento de **vibración** o de **oscilación** la partícula efectúa movimientos repetitivos de vaivén.

Todo se mueve en la naturaleza, tanto en nuestra escala macroscópica como en la escala del microcosmos: las moléculas vibran y giran sobre sí mismos, tanto en los sólidos como en los gases y los líquidos, y se desplazan (si no están en un medio sólido).

1.4.1. Movimientos en una o más dimensiones

Otra manera de clasificar los movimientos es según el número de variables con el que los podemos determinar. Para describir cuantitativamente los movimientos hemos de conocer cuántas variables deberemos utilizar en cada caso, además de la variable tiempo. Imaginemos un vehículo que:

a) Se mueve en línea recta por una carretera.
b) Se mueve por una carretera llena de curvas.
c) Entra en un transbordador y lo llevan a una isla.
d) Entra en un avión y lo llevan a otro lugar.

¿Cuántas variables (además del tiempo) necesitamos para...

1) ... conocer qué distancia ha recorrido el vehículo hasta un instante determinado?

2) ... poder localizar el vehículo en cada instante (conociendo la posición)?

Las dos preguntas anteriores son diferentes y tienen respuestas bien diferenciadas, como vemos en la tabla 1.

Tabla 1. Número de variables necesarias para describir distancias o posiciones en las situaciones *a*, *b*, *c* y *d* mencionadas en el texto

	Número de variables	
	Distancia	**Posición**
a)	1	1
b)	1	2
c)	1	2
d)	1	3

¡Veamos por qué! Primero deberemos hablar de cómo localizamos los puntos por donde pasa el objeto que se mueve.

Actividad 1.8. Variables para la localización de un objeto

¿Cuántas variables necesitamos para localizar un punto en el espacio, en un plano o sobre una línea?

Solución

La determinación de la posición de un punto en el espacio requiere 3 variables, las tres coordenadas del vector de posición (figura 9):

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{21}$$

donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son tres vectores unitarios en la dirección de los ejes cartesianos.

El vector de posición de un punto *P* es el vector que une el origen de coordenadas con este punto del espacio. Para conocer las coordenadas (*x, y, z*), proyectamos el punto *P* sobre el eje *Z* y sobre el punto *P'* del plano *XY*, y después volvemos a proyectar P' sobre los ejes *X* e *Y*.

Cuando la partícula se mueve por el espacio, las coordenadas del punto donde está en cada instante de tiempo *t* son función del tiempo y escribimos:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{22}$$

y análogamente para los tres componentes del vector de posición $\vec{r}$:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \tag{23}$$

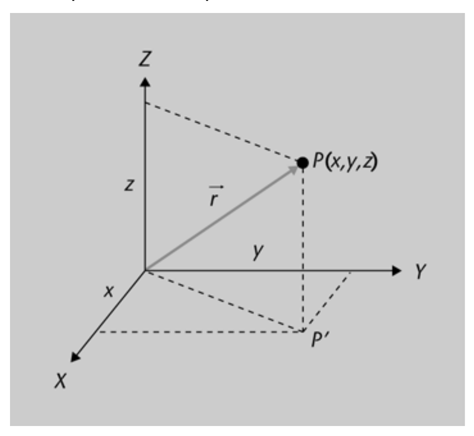
Magnitudes escalares y vectoriales

Recordemos que cuando una magnitud, como el tiempo, puede determinarse con un solo número, decimos que es una magnitud *escalar*, y cuando necesitamos tres variables para poderla determinar, hablamos de una magnitud *vectorial*.

Representación de vectores

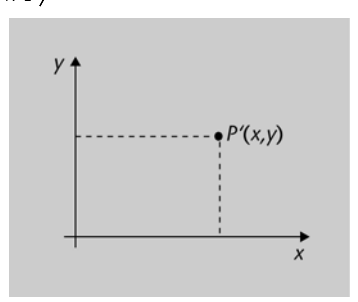
Los vectores, como el vector de posición, se representan habitualmente en negrita, **r** o con una flecha, $\vec{r}$. Este segundo convenio es el que seguiremos en este curso.

Figura 9. Las tres coordenadas cartesianas de un punto en el espacio tridimensional



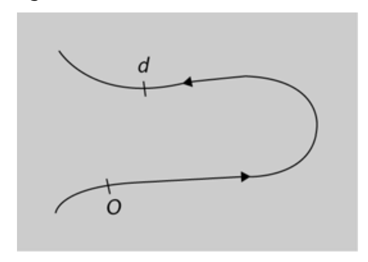
La determinación de la posición de un punto en un plano requiere 2 variables (figura 10); por ejemplo, si utilizamos coordenadas cartesianas, un punto como *P'* se describe con la abscisa y la ordenada correspondiente: *P'*(*x*,*y*). El punto *P'* de la figura 10 puede ser el punto *P'* de la figura 9, es decir, la proyección de un punto *P* del espacio sobre el plano *XY*.

Figura 10. Las coordenadas cartesianas de un punto *P'* en un plano son dos, *x* e *y*



La determinación de la posición de un punto sobre una línea (que no tiene por qué ser recta) requiere sólo 1 variable. Podemos dar, por ejemplo, la distancia medida sobre la *trayectoria* del objeto que se mueve, es decir, sobre la línea imaginaria que recorre el vehículo (figura 11). Esta distancia se mide con respecto a un punto concreto, que tomamos como origen.

Figura 11



Como caso particular, si el movimiento de un objeto es a lo largo de una recta, como el eje *X*, la posición instantánea del objeto la da la función *x*(*t*). Sólo necesitamos una variable de posición.

Trayectoria

Denominamos *trayectoria* de un punto que se desplaza a la línea imaginaria por la cual pasa durante su movimiento.

Figura 11

Con una variable, *d*, podemos determinar la posición de un punto que se mueve por una curva, que es la trayectoria del movimiento. La distancia *d* se mide sobre la trayectoria y desde el origen *O*.

Se habla de movimientos unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales.

Según el número de variables que necesitamos para localizar un objeto que se mueve, hablamos de movimientos de una, dos o tres dimensiones, respectivamente.

Así, son movimientos:

- En una dimensión: el movimiento de un objeto sobre una recta.
- En dos dimensiones: el movimiento de un objeto sobre un plano, sobre una esfera o sobre un círculo, por ejemplo.
- En tres dimensiones: el movimiento de un objeto en el espacio; por ejemplo, el de un avión.

Para representar los movimientos se utilizan otros sistemas de coordenadas, aparte de las coordenadas cartesianas: las coordenadas polares, las esféricas, las cilíndricas, etc. Cada sistema de coordenadas concreto es más adecuado para describir ciertos movimientos o procesos que ocurren sobre geometrías particulares (un plano, una esfera, etc.).

Cuentakilómetros

El cuentakilómetros mide los kilómetros que hemos hecho desde que compramos el vehículo (o desde que pusimos el cuentakilómetros a cero).

Y ahora ya podemos explicar los valores de la tabla 1.

Velocímetro

El velocímetro mide el número de km/h a los que viajamos en cada momento.

Actividad 1.9. Dimensiones del movimiento

Explicad los valores del número de variables que necesitamos para describir distancias y posiciones en los movimientos indicados en la tabla 1.

Solución

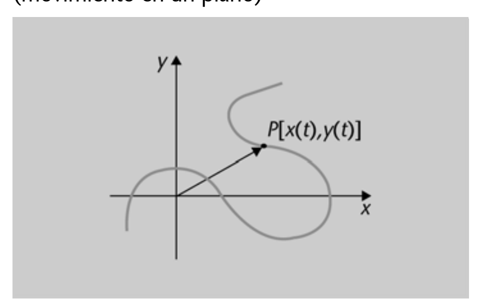
La columna "distancia" de la tabla 1 siempre tiene el valor 1 porque con una sola variable podemos determinar la distancia que ha recorrido un vehículo a lo largo de su trayectoria, cualquiera que sea el recorrido. Es lo que ocurre, por ejemplo, con el cuentakilómetros, cuando es el mismo vehículo el que viaja; si lo transportan en tren o en barco, por ejemplo, debemos mirar el cuentakilómetros del medio de transporte para conocer la distancia que ha recorrido el vehículo.

En cuanto a las variables necesarias para determinar la posición de un vehículo que se mueve...

- ... en línea recta, hace falta una variable, por ejemplo la posición x sobre el eje X;
- ... por una carretera, se necesitan dos variables (longitud y latitud, como las que proporciona el GPS, o las posiciones x e y en unos ejes cartesianos bidimensionales);
- ... por el mar, hacen falta dos variables, como en el caso anterior;
- ... por el aire, necesitamos tres variables, porque a las dos variables de los dos casos anteriores hay que añadir la altura. Pueden ser las tres variables x, y, z de unos ejes cartesianos tridimensionales en el espacio (figura 9).

Cuando el objeto se mueve, las coordenadas del punto que describen la localización son función del tiempo. Por ejemplo, un movimiento bidimensional se puede representar con dos funciones del tiempo, $x(t)$ e $y(t)$, que son las coordenadas cartesianas del punto que permite localizar en cada instante el objeto que se mueve (figura 12).

Figura 12. Posición de la partícula sobre una trayectoria que se desarrolla en dos dimensiones (movimiento en un plano)



1.4.2. ¿Qué hemos aprendido?

- La complejidad de los movimientos de la naturaleza se puede reducir a tres tipos básicos: translaciones, rotaciones y vibraciones.

- Los movimientos son sobre una línea, sobre una superficie cualquiera, en particular un plano, o en el espacio, y hablamos de movimientos en una, dos o tres dimensiones, respectivamente.

Hemos discutido algunos ejemplos de movimientos más o menos sencillos. Un ejemplo de movimiento complicado es el de un vagón por una montaña rusa. Lo discutiremos brevemente y aprovecharemos para introducir la herramienta denominada *simulación por ordenador* y los conceptos de *condiciones iniciales* y *parámetros* de un movimiento cualquiera.

1.5. Ejemplo. La montaña rusa

Hay montañas rusas que tienen curvas y movimientos muy complicados en el espacio, en 3 dimensiones, como el Dragon Khan de Port Aventura (figura 13).

Figura 13. Montaña rusa (Dragon Khan de Port Aventura)



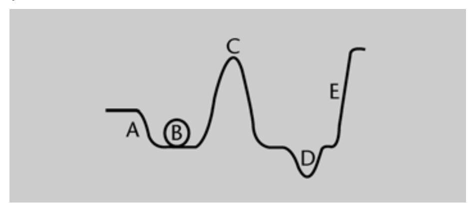
Fuente: http://es.wikipedia.org/

Si alguien quiere estudiar el movimiento del vagón por la montaña rusa, en lugar de comenzar con una situación tan complicada como la de la figura 13, puede seguir un método de la ciencia que suele dar buenos resultados: comenzar por problemas sencillos que ayuden a entender la situación más complicada. Se podría analizar, por ejemplo, un modelo más sencillo de montaña rusa, como el de la figura 15, en el que el movimiento ocurre en un solo plano, y que nos permitiría también discutir los tipos de movimientos básicos que hemos descrito en el subapartado anterior, 1.4. Hagámoslo brevemente.

Actividad 1.10. Movimientos en una montaña rusa

Si un vagón se mueve por la montaña rusa de la figura 14 podemos observar los tres tipos de movimientos básicos que hemos mencionado en el subapartado 1.4: translaciones, rotaciones y vibraciones. ¿Dónde se pueden ver?

Figura 14. Un modelo de montaña rusa en un plano (movimiento en dos dimensiones)



Solución

La montaña rusa tiene una pendiente de caída inicial, A, un bucle, B, una colina, C, un pozo, D, y una subida final, E. El movimiento de translación ocurre en la mayor parte de la trayectoria; este movimiento puede ser uniforme, en tramos planos horizontales, y también acelerado, en caídas y subidas con un aumento o una reducción de la velocidad (es decir, con aceleración).

Vemos rotaciones en el bucle B, rotaciones parciales con respecto a un centro de curvatura al remontar la colina C y en el pozo D. Incluso, si el vagón queda atrapado en el pozo D, sin poder salir, puede describirse un movimiento oscilatorio alrededor del punto más bajo del pozo.

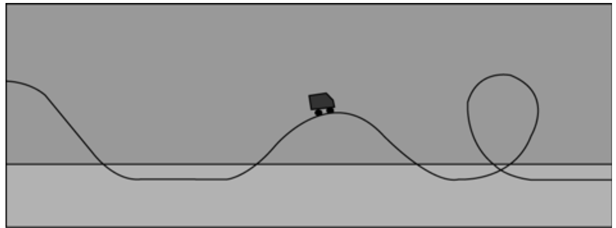
Incluso habiendo visto un caso muy sencillo, justo es decir que hoy en día hay herramientas muy útiles que un ingeniero puede utilizar para resolver problemas de mecánica: las simulaciones de procesos por ordenador.

1.5.1. Simulaciones por ordenador

El modelo de montaña rusa de la figura 14 es mucho más sencillo que el Dragon Khan, pero el estudio detallado del movimiento que puede darse puede ser complicado. A veces cuesta imaginar qué pasaría si, por ejemplo, pusiésemos colinas o bucles de dimensiones diferentes. Para hacer estas pruebas se pueden utilizar simulaciones por ordenador.

Una simulación por ordenador de un proceso físico es una recreación en la pantalla de un ordenador de los rasgos esenciales que describen el proceso. Las simulaciones son una herramienta de estudio y de trabajo muy potente. Podéis hacer una búsqueda en Internet con términos como *simulation roller coaster* (simulaciones montaña rusa) y encontraréis, por ejemplo, una simulación muy completa de montaña rusa (http://www.download-free-games.com/simulation/rollercoaster_tycoon2.htm), o la simulación muy simplificada que muestra la figura 15, y que es muy didáctica. Con simulaciones como éstas, y muchas otras que podéis encontrar en Internet sobre temas de cinemática y dinámica, podéis trabajar muchos de los conceptos que estudiaréis este curso.

Figura 15. Pantalla de una simulación por ordenador de una montaña rusa sencilla. Se pueden modificar los parámetros y estudiar los efectos sobre el movimiento



http://www.funderstanding.com/coaster

Actividad 1.11 (opcional). Simulaciones

La simulación por ordenador referida en la figura 15 contiene los movimientos básicos de una montaña rusa. Si tenéis tiempo, id a la página de Internet que se menciona y observad los contenidos y el funcionamiento de la simulación.

Solución

Podéis modificar diversos parámetros de la simulación, como la velocidad inicial del vagón, la altura de la colina, el radio del bucle, etc.

Por ejemplo, para unos determinados valores de los parámetros, el vagón puede salir despedido, porque no puede mantenerse sobre la trayectoria que define la montaña rusa. Podéis verlo si aumentáis la velocidad inicial o reducís la altura de la colina, por ejemplo.

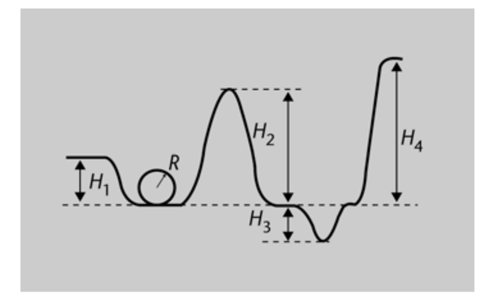
Desgraciadamente no tenemos tiempo de adentrarnos en el mundo de las simulaciones de procesos por ordenador.

En cualquier caso, tanto en los movimientos reales como en los descritos mediante simulaciones por ordenador se deben tener en cuenta las condiciones iniciales de los movimientos y los parámetros que los determinan.

1.5.2. Condiciones iniciales y parámetros

La descripción completa de un movimiento incluye, habitualmente, las condiciones de partida, lo que se denomina *condiciones iniciales* del movimiento. Por ejemplo, la posición y la velocidad iniciales del objeto que se mueve. El instante inicial suele ser el instante $t = 0$.

Figura 16. Parámetros en el modelo bidimensional de montaña rusa de la figura 14



Otro concepto útil en el análisis de movimientos es el de los *parámetros* del problema. Los parámetros son valores de determinadas magnitudes del movimiento que se mantienen fijos para un caso concreto, pero que varían de un

caso a otro. Por ejemplo, si uno quiere estudiar cuál es la máxima velocidad a la que se puede tomar una curva a una velocidad determinada sin volcar, el radio de la curva de la carretera sería un parámetro. Para el caso de la montaña rusa de la figura 14 hemos marcado en la figura 16 algunos parámetros: alturas de las colinas (H_1, H_2 i H_4), radio del bucle (R) y profundidad del pozo (H_3). Pero podrían haber sido más, como la longitud de los tramos horizontales, la curvatura de la cumbre de la colina o la masa del carrito.

En la simulación de la figura 15 podemos modificar algunos parámetros básicos, como las alturas de las colinas y el radio del bucle y, así, podemos investigar qué tipos de movimiento acontecen en cada caso.

1.5.3. ¿Qué hemos aprendido?

- Las simulaciones por ordenador son herramientas útiles para analizar movimientos complicados.
- En cada movimiento, aparte de las variables posición y tiempo que definen la trayectoria, podemos hablar de las condiciones iniciales del movimiento y, en algunos problemas, de los parámetros del movimiento.

Con las discusiones que hemos entablado hasta ahora sobre movimientos ya estamos en condiciones de formalizar los conceptos básicos que nos permitirán caracterizarlos. Es lo que vamos a hacer en el próximo apartado. Aquí recordaremos brevemente algunos conceptos elementales de matemáticas que nos serán necesarios.

1.6. Valores medios, cocientes, proporcionalidades

Antes de entrar en la formalización de los conceptos que utilizaremos para describir los movimientos de los objetos, repasaremos algunos conceptos matemáticos básicos y, al mismo tiempo, muy útiles en este curso: el significado del valor medio, de los cocientes y de la proporcionalidad.

1.6.1. Valores medios

Un vehículo en movimiento tiene una determinada velocidad en cada instante, que puede ser constante o no. Hablamos a veces de velocidad media del vehículo. Descubramos qué significa este concepto.

Un vehículo que va a una velocidad constante de 36 km/h recorre en 3 h una distancia de 108 km porque:

$$Distancia = Velocidad \times Tiempo = 36 \text{ km/h} \times 3 \text{ h} \qquad (24)$$

Pero un vehículo no suele ir a velocidad constante: se detiene, acelera, frena, etc. Si la velocidad *media* durante 3 h de un vehículo que tiene diferentes velocidades en diferentes momentos, fuera también de 36 km/h, ¿qué espacio habrá recorrido durante 3 h? La respuesta es que recorre también 108 km.

El concepto de *valor medio* es muy utilizado en la ciencia y en la ingeniería, y en otros campos, como la sociología, la economía, etc. Por ejemplo, ¿qué significa que la media de hijos por pareja es de 1,2? O ¿qué significa que la media de las calificaciones de un alumno es 7,3? ¿O que la velocidad media de un vehículo es de 72 km/h?

No es correcta la típica respuesta siguiente: "El valor medio de un conjunto de valores es la suma de valores dividida por el número de éstos". Este es el procedimiento para calcular el valor medio de un conjunto de valores numéricos, es la *definición operativa*, pero no es la definición de la magnitud, ni nos da su significado ni su utilidad.

Fijémonos en que el valor medio de una magnitud no tiene por qué ser un valor del conjunto de valores de la magnitud. Ninguna familia tiene 1,2 hijos, ni es necesario que la calificación 7,3 figure entre las calificaciones de un alumno, que pueden ser valores como 5, 6,5, 7,5, 9, etc., y que no haya ningún 7,3.

Pensad en la definición siguiente: "El valor medio de un conjunto de valores de una magnitud es un número que permite caracterizar el conjunto, y es el valor que tendría cada elemento del conjunto si todos tuviesen el mismo valor numérico".

De esta definición podemos deducir que el **valor medio** es un valor que permite caracterizar un conjunto, y que su significado es el de asignar un mismo valor a todos los elementos del conjunto.

O sea, el valor medio es el resultado de distribuir por igual el valor total de la magnitud entre los elementos del conjunto.

Como ejemplo del significado de valor medio que acabamos de dar, volvemos al vehículo en movimiento. Un vehículo puede tener una velocidad media de 100 km/h, por ejemplo, y su velocidad en cada instante, que se denomina *velocidad instantánea*, puede ser 0 km/h (cuando está detenido), 92 km/h, 117 km/h, etc. Si este vehículo viaja durante 2 h a una velocidad media de 100 km/h, recorrerá 200 km en 2 h, y ésta sería la misma distancia que recorrería si siempre viajase a 100 km/h, es decir, si asignamos un valor a la magnitud velocidad que sea idéntica en todo momento.

Pongamos otro ejemplo.

Actividad 1.12. Repartos

En una familia, un miembro se come un pollo y los otros tres miembros no comen ninguno. ¿Cuál es el tanto por ciento de pollo que come cada miembro de la familia, de media? ¿Qué significa el resultado que obtenemos?

Solución

Cada miembro come, de media, un 25% del pollo.

$$\frac{1 \text{ pollo}}{4 \text{ personas}} = 0{,}25 \frac{\text{pollo}}{\text{persona}} \quad (25)$$

Y expresamos el resultado en tanto por ciento multiplicando numerador y denominador por 100:

$$0{,}25 = \frac{0{,}25}{100} 100 = \frac{25}{100} = 25\% \quad (26)$$

Si los cuatro miembros de la familia hubiesen comido la misma cantidad de pollo, cada uno de ellos habría comido 1/4 (un 25%).

En conclusión, para cada **magnitud** que representa un concepto debemos distinguir entre su definición, su significado y su definición operativa, o sea, la manera de calcularla o medirla.

Por ejemplo, cuando definimos el concepto de valor medio, dimos el significado y mencionamos cómo se calcula. Lo mismo podemos decir de cualquier magnitud científica: debemos aprender su definición, su significado y la manera de calcularla.

El cálculo de un valor medio implica hacer una división. Repasemos ahora el concepto de división, que aparece también en la definición de muchas magnitudes físicas.

1.6.2. Relaciones entre variables: cocientes

En ciencias y en ingeniería se definen muchas magnitudes como cocientes y, por tanto, conviene que tengamos claro qué es una división. Acabamos de ver ejemplos: la velocidad media o el tanto por ciento medio de pollo que come cada miembro de una familia se calcula mediante una división.

Puede que recordéis lo que nos decían de pequeños “dividir es repartir”. Esto tiene sentido en algunos casos, por ejemplo si tenemos 8 regalos que queremos repartir entre 4 criaturas. Si calculamos el cociente siguiente:

$$\frac{8 \text{ regalos}}{4 \text{ criaturas}} = 2 \frac{\text{regalos}}{\text{criatura}} \quad (27)$$

el resultado de la división es que corresponden “2 regalos por (unidad de) criatura”. En cambio, si hacemos la división al revés, obtenemos media criatura por cada regalo:

$$\frac{4 \text{ criaturas}}{8 \text{ regalos}} = 0{,}5 \frac{\text{criaturas}}{\text{regalo}} \qquad (28)$$

El resultado puede que os sorprenda: ¡no puede haber media criatura! Vemos que cuando hacemos una división no siempre "repartimos". Asimismo, la división entre las dos magnitudes, sean criaturas dividido por regalos, o regalos dividido por criaturas, da el mismo resultado en términos de criaturas y regalos: si tenemos en el segundo caso 0,5 criaturas/regalo y queremos saber lo que corresponde a cada criatura (no a cada regalo), multiplicamos numerador y denominador del resultado (28) por 2 y obtenemos:

$$0{,}5 \frac{\text{criaturas}}{\text{regalo}} = \frac{2 \times 0{,}5 \times \text{criaturas}}{2 \times \text{regalo}} = \frac{1 \text{ criatura}}{2 \text{ regalos}} \qquad (29)$$

es decir, 1 criatura para cada 2 regalos, cosa que ya sabemos: a cada criatura le corresponden dos regalos.

La conclusión que sacamos de este ejemplo es que una división entre dos magnitudes cualesquiera A y B:

$$\frac{A}{B} \qquad (30)$$

da la cantidad de A que corresponde a la unidad de B. Éste es el sentido general de una división, y que debemos tener bien presente.

> Calculando un cociente entre dos magnitudes obtenemos cuánto de la magnitud del numerador corresponde a cada unidad de la magnitud del denominador.

Practiquemos el significado de las divisiones.

Actividad 1.13. Ejemplos de cocientes

Interpretad los cocientes siguientes y asignad nombre a la magnitud que obtengáis, si la conocéis:

a) $\frac{3/5}{4/9}$ (31)

b) $\frac{F}{m}$ (donde F es una fuerza y m una masa) (32)

c) $\frac{F}{q}$ (donde F es una fuerza y q una carga eléctrica) (33)

d) $\frac{8 \text{ EUR}}{4 \text{ kg}}$ (34)

e) $d = \frac{m}{V}$ (donde m es una masa y V un volumen) (35)

f) $p = \frac{F}{S}$ (donde *F* es una fuerza y *S* una superficie perpendicular a la fuerza) (36)

g) $\frac{12\,\text{cm}}{4\,\text{cm}}$ (37)

Solución

a) Es la cantidad del numerador (de cuya magnitud tenemos 3/5) que correspondería a una unidad de la magnitud del denominador (de la cual tenemos 4/9). Resulta:

$$\frac{3/5}{4/9} = \frac{27}{20} = \frac{27/20}{1} \quad (38)$$

Corresponden veintisiete vigésimos (de la magnitud) del numerador a cada unidad (de la magnitud) del denominador.

b) Veréis en el apartado 3 que se trata de la magnitud *aceleración*, o fuerza que actúa por unidad de masa.

c) Veréis en la segunda parte del curso que se trata de la magnitud *intensidad del campo eléctrico*, o fuerza que actúa por unidad de carga eléctrica.

d) El cociente es el precio, o valor en euros, por cada kilogramo.

e) La magnitud *densidad* es la masa que tiene la unidad de volumen.

f) La magnitud *presión* se define como la fuerza que actúa por unidad de superficie perpendicular a la dirección de la fuerza.

g) El cociente da 3, el número de veces que la magnitud del numerado contiene la unidad de la magnitud del denominador: en 12 cm caben 3 veces la longitud 4 cm.

El último es un ejemplo de cociente de magnitudes *homogéneas*, es decir, de magnitudes que se miden en las mismas unidades. Decimos que ambas magnitudes tienen las mismas dimensiones o que son conmensurables.

Como veis, en todos los ejemplos anteriores, cuando calculamos el cociente de dos magnitudes obtenemos una magnitud nueva, que tiene unidades y un significado diferente de las magnitudes que dividimos. Por ejemplo, en el caso d) anterior, el resultado de dividir coste y masa es lo que denominamos *precio* (o precio unitario), y lo medimos en EUR/kg. Esta magnitud es diferente de la magnitud masa (que medimos en kg) y de la magnitud coste (que medimos en euros).

Así, sobre la **división *A*/*B*** podemos decir que el resultado de dividir *A* por *B*, *A*/*B*, es tanto de *A* por unidad de *B*.

Y la magnitud resultante de la división tiene **unidades**: las unidades de la magnitud cociente son el resultado de dividir las unidades de las magnitudes *A* y *B*.

Algunos cocientes entre dos magnitudes tienen la propiedad particular de que el resultado numérico que obtenemos es independiente del valor concreto que tengan las magnitudes que dividimos; esto indica que hay una relación especial entre estas magnitudes, denominada *de proporcionalidad directa*. A continuación recordaremos este concepto.

1.6.3. Proporcionalidades

Hablemos ahora de proporcionalidades, otro concepto muy útil en el mundo de la ciencia y la ingeniería. Ya lo hemos encontrado al discutir el significado geométrico de rectas que pasan por el origen (figura 4). Como hemos visto, si un vehículo circula a una velocidad constante de 36 km/h o a una velocidad media de 36 km/h durante 3 horas, entonces el recorrido *d* que hará el vehículo en este intervalo de tiempo, es:

$$Distancia = v \cdot t = 36 \frac{\text{km}}{\not{\text{h}}} \times 3\ \not{\text{h}} = 108\ \text{km} \tag{39}$$

Recordad que, como ya hemos dicho en la solución de la actividad 1.3, debemos operar con las magnitudes y sus unidades de la misma manera que con las cifras: la unidad "hora" del numerador y del denominador de la expresión anterior se simplifican y desaparecen del resultado.

Si ahora duplicamos el tiempo durante el que se mueve el vehículo, 2 × 3 h = 6 h, y éste continúa a la misma velocidad constante, el espacio recorrido también se duplica y hará 2 × 108 km = 216 km. Esto ocurre porque, si la velocidad es constante, el espacio recorrido y el tiempo que dura el movimiento son *proporcionales*; simbólicamente:

$$Distancia \propto t \tag{40}$$

Símbolo de proporcionalidad, $\propto$

$a \propto b$

significa que la magnitud *a* es proporcional a la magnitud *b*, es decir, que el cociente *a/b* es constante.

o bien, si introducimos la constante de proporcionalidad, que en este caso es la magnitud que denominamos velocidad, escribiremos:

$$d = v \cdot t \tag{41}$$

Esta expresión es la misma que hemos escrito antes, ecuación 3.

Observad que cuando decimos que *d/t* es constante significa que el resultado de la división, *v*, no depende de las magnitudes que dividimos *d* y *t*.

La ecuación (41) nos dice que hay proporcionalidad directa entre el espacio recorrido y el tiempo que se ha tardado en hacerlo. Esto no pasa con el billete que cae (véase el subapartado 1.2 y la actividad 1.3): la longitud del objeto que cae y el tiempo que tarda en caer *no* son proporcionales. Si tomamos un billete más grande, por ejemplo un billete imaginario (o un trozo de cartón) que mida el doble que el billete de 10 euros, 25,4 cm, el tiempo que tardaría en caer entre los dedos de una persona no sería el doble que el tiempo que tarda en caer un billete de 10 euros, sino sólo un 41% más de tiempo. Este cálculo ya lo hemos hecho en la actividad 1.3, a partir de la relación (1):

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} \tag{42}$$

Analicemos este ejemplo.

Actividad 1.14. Falta de proporcionalidad

Haced una gráfica del tiempo de caída, ecuación (42), en función de la longitud del billete. Para simplificar los cálculos, suponed que la relación es:

$$t\ (\text{s}) = 0{,}1\sqrt{L\ (\text{cm})} \tag{43}$$

Haced una tabla para unos pocos valores de L y la gráfica correspondiente. ¿Sale una función lineal, es decir, una recta?

Fijaos en la ecuación (43): cuando escribimos t(s) o L(cm) es una manera de indicar en qué unidades se deben medir las magnitudes, sin tener que especificar las unidades en las que se miden los coeficientes numéricos que tenga la expresión, como el factor 0,1, porque las unidades en las que viene dado este factor se pueden decidir por el contexto. ¿Qué unidades son?

Solución

Si sustituimos en la ecuación (42) el valor de g = 9,81 m/s^2 = 981 cm/s^2, obtenemos:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot L}{981\ \text{cm/s}^2}} \tag{44}$$

Si suponéis que vamos a expresar la longitud del billete en cm, y esto lo indicamos con los símbolos L(cm), y calculamos los factores numéricos, obtenemos:

$$t = 0{,}045\sqrt{L\ (\text{cm})} \tag{45}$$

En la expresión anterior, las unidades en las que se mide el factor numérico 0,045 son segundos partido por la raíz de cm. Se han obtenido de calcular la raíz cuadrada del cociente de unidades de $2/g$.

Utilizaremos la expresión (43) en lugar de la (45) para trabajar con números más sencillos.

Para hacer una tabla y la gráfica de la función $t(L)$ hemos de dar valores a la variable L. En principio, la fórmula matemática (43) vale para cualquier valor de L, sea grande o pequeño, siempre que no sea negativo. Podríamos tomar valores como L = 10 cm, 3.500 cm, $2{,}3 \times 10^6$ cm, etc. Según el contexto de cada problema, deberá escogerse un intervalo de valores determinados de la magnitud que queremos representar.

En este caso, como estamos hablando de caída libre de billetes, los valores típicos de la longitud de un billete son de algunos centímetros. Si, además, queremos saber cómo se comporta la función para valores pequeños de la variable, con el fin de hallar tendencias de la función, podemos tomar L en el intervalo $0 < L < 10$ cm, por ejemplo. De esta manera, confeccionamos la tabla 2 para unos cuantos valores de L, que sustituimos en la expresión (43). Podemos tomar valores sencillos que permitan hacer los cálculos mentalmente. En general, sencillamente utilizamos la calculadora para obtener los valores.

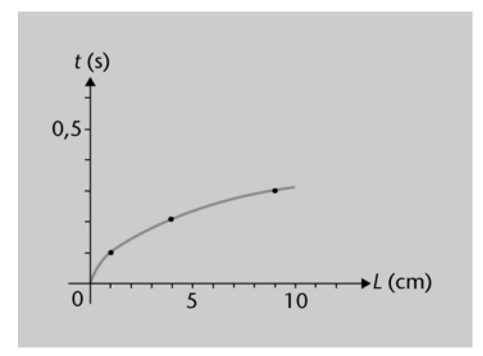
Tabla 2. Algunos valores de la función $t(L)$, ecuación (43)

L (cm)	*t* (s)
0	0,0
1	0,1
4	0,2
9	0,3

La representación de los valores de la tabla 2 da una gráfica no lineal, como vemos en la figura 17; es decir, la gráfica no es una línea recta. La curva que hemos trazado y que une los puntos de la gráfica de la figura 17 permite interpolar, es decir, determinar valores de L para valores de t que no están en la tabla 2. Fijémonos también en que hemos dibujado

la función para valores más grandes que los que hay en la tabla: este procedimiento se denomina *extrapolación*.

Figura 17



Figura

Representación gráfica de la función dada por la ecuación $t = 0{,}1\sqrt{L}$ para los valores de la tabla 2. Se ha dibujado una curva que pasa por los puntos de la gráfica.

A la vista de la función representada en la figura 17 podemos concluir también que la función $t(L)$ crece suavemente con la longitud del billete, porque la potencia a la que está elevada la magnitud L es fraccionaria y menor que la unidad, $t = 0{,}1\ L^{1/2}$, ecuación (43).

Recordad

$a^{b/c}$ es una notación abreviada para escribir una raíz y una potencia:

$$a^{b/c} = \sqrt[c]{a^b}$$

¿Por qué ocurre esto? ¿Por qué no tarda en caer un billete como el de la figura 1 el doble de tiempo si tiene doble longitud? Porque la relación que liga las magnitudes "tiempo de caída" y "longitud" del billete no es lineal. También decimos que no se trata de una proporcionalidad directa entre t y L, porque no tenemos una potencia unitaria de L. Según la ecuación (42), en el caso de la caída libre de un billete, la potencia de L es $^1/_2$, es decir:

$$t \propto \sqrt{L} \tag{46}$$

O también:

$$t \propto L^{1/2} \tag{47}$$

Por lo tanto, sí que hay proporcionalidad entre el tiempo y la raíz cuadrada de la longitud del objeto que cae: tiempo y longitud no son proporcionales, pero t y $\sqrt{L}$ sí. En otras palabras, si convertís la relación de proporcionalidad (47) en una ecuación, la relación entre tiempo y longitud se escribirá de la manera siguiente:

$$t = \text{constante} \cdot \sqrt{L} \tag{48}$$

La "constante" que aparece en la expresión anterior sólo es "constante" en el sentido de que no depende de las magnitudes t y L, pero puede depender de otras magnitudes. Ahora veréis un ejemplo.

Actividad 1.15. Gravedades diferentes

Nos dicen que la aceleración de la gravedad en la Luna es 5/9 del valor de la gravedad terrestre.

a) ¿Sería más fácil, o más difícil, atrapar un billete (en el experimento de la figura 1) en la Luna o en la Tierra?

b) Calculad también el tanto por ciento que se alarga o se acorta el tiempo de caída de los billetes en la Luna, con respecto a la Tierra.

Solución

a) El tiempo de caída es inversamente proporcional a la raíz de g, según la ecuación (42); de esta manera, para un billete dado de longitud L, la dependencia $t(g)$ para valores diferentes de g sería:

$$t = \frac{constante}{\sqrt{g}} \qquad (49)$$

o bien:

$$t \propto g^{-1/2} \qquad (50)$$

Si la gravedad lunar es menor que la terrestre, la aceleración de caída de los objetos que caen libremente en la Luna es menor que la aceleración con la que caen en la Tierra. Por lo tanto, el tiempo de caída en la Luna será mayor que en la Tierra. En consecuencia, tendremos más tiempo para atrapar el billete que cae. Será más fácil en la Luna.

b) Si g_T y g_L son la aceleración de la gravedad en la Tierra y en la Luna, respectivamente, el cociente entre los tiempos de caída del mismo billete en los dos planetas, Tierra y Luna, es, a partir de la ecuación (42):

$$\frac{t_{Luna}}{t_{Tierra}} = \frac{\sqrt{2L/g_L}}{\sqrt{2L/g_T}} \qquad (51)$$

y si simplificamos y sustituimos el valor relativo de g_T y g_L:

$$\frac{t_{Luna}}{t_{Tierra}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9}{5}} \approx 1{,}34 \qquad (52)$$

En la Luna el tiempo de caída es un 34% más largo que en la Tierra.

Recordemos lo que significa la constante de proporcionalidad en una relación de proporcionalidad como:

$$a \propto b^n \qquad (53)$$

donde n es un número entero o fraccionario. La relación anterior se puede escribir como una igualdad:

$$a = constante \cdot b^n \qquad (54)$$

donde la "constante" no depende de las magnitudes a ni b, pero puede depender de otras magnitudes diferentes. En la igualdad (48) la "constante" no depende de t ni de L, pero sí depende de g. En la igualdad (49) la "constante" no depende de t ni de g, pero sí depende de L.

Aprovecharemos la función $t(L)$ no lineal que hemos estado trabajando en estas actividades, $t = \sqrt{2L/g}$, para recordar que una misma relación entre variables puede tener representaciones gráficas aparentemente diferentes, según las magnitudes que escojamos para representar en cada eje.

Tanto por ciento

Si una magnitud tiene, por ejemplo, el valor:

$$a = 1{,}34 \cdot b$$

entonces a es "uno coma treinta y cuatro" veces mayor que b.

Podemos expresar este resultado en tanto por ciento; multiplicamos y dividimos la igualdad anterior por 100:

$$a = \frac{134}{100} b$$

y hacemos:

$$a = \frac{100 + 34}{100} b = (1 + \frac{34}{100}) b$$

En la última expresión se ve que a es un 34/100 mayor que b.

Escribimos que a es un 34% mayor que b.

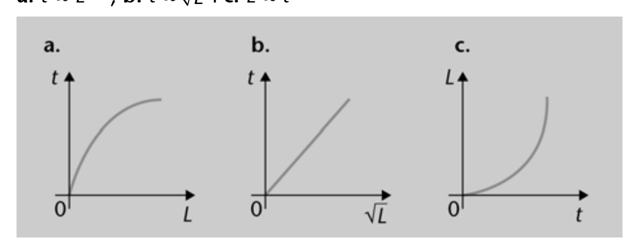
Actividad 1.16. Gráficas de funciones

Haced gráficas cualitativas de las relaciones siguientes a partir de la ecuación (42):

- representad t en función de L;
- representad t en función de la variable $\sqrt{L}$;
- representad L en función de t (es decir, tomad L como variable dependiente y t como independiente).

Solución

Figura 18. Representación cualitativa de las funciones
a. $t \propto L^{1/2}$, **b**. $t \propto \sqrt{L}$ i **c**. $L \propto t^2$



Las gráficas cualitativas como las de la figura 18 pueden esbozarse a partir de algunos valores que demos a la variable independiente en la función analítica correspondiente, o bien puede recordarse lo que ya se sabe de la asignatura de matemáticas.

La función de la figura 18a es la misma que hemos visto en la figura 17. La función representada en la figura 18b es una representación lineal, como las que hemos visto antes, pero ahora la variable independiente está elevada a una potencia diferente de la unidad.

El caso **c** es el de la función:

$$L = \frac{1}{2} g t^2 \tag{55}$$

que se obtiene a partir de la ecuación (42) despejando L y representa una parábola. El significado de esta gráfica es el mismo que el de la figura 18a: a medida que aumenta la variable L, la variable t crece a un ritmo más lento que si la relación fuese lineal. Las dos funciones **a** y **c** son funciones inversas la una de la otra (ved el cuadro de la derecha).

Cuando confeccionamos la gráfica 18c tomando t como variable independiente, de acuerdo con la ecuación (55), observamos que la magnitud L crece más rápidamente con el tiempo que si la relación $L(t)$ fuese lineal. El crecimiento es cuadrático, es decir, con una potencia 2:

$$L \propto t^2 \tag{56}$$

Funciones inversas

En una función elemental cualquiera:

$$y = y(x)$$

podemos despejar la variable x y escribir:

$$x = x(y)$$

Esta función es la función inversa de la primera.

Por ejemplo, si:

$$t = \sqrt{L}$$

despejamos x y obtenemos:

$$L = t^2$$

Las funciones $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$ son funciones inversas la una de la otra, como lo son la función exponencial y la función logarítmica, entre otras.

1.6.4. ¿Qué hemos aprendido?

- Hemos recordado el significado del concepto de valor medio.
- Hemos recordado qué es una división (o un cociente) y cómo se lee.
- Hemos visto que las relaciones entre las magnitudes pueden ser lineales, o de proporcionalidad directa, o no lineales, cuando la variable independiente está elevada a cualquier potencia diferente de la unidad.

Acabaremos este subapartado con unas ideas básicas sobre el sistema de unidades que se utiliza en ciencias e ingeniería.

1.7. El Sistema Internacional de unidades, SI

Hemos dicho en el subapartado 1.2.1 que una magnitud es una propiedad de un cuerpo, de un sistema o de un proceso físico que puede medirse.

Cada magnitud tiene unas unidades de medida asociadas en el Sistema Internacional de unidades (SI), que es un sistema de unidades aceptado por la mayoría de los países del mundo.

En este sistema se toman determinadas magnitudes como fundamentales y también se acuerdan sus unidades. A partir de aquí, las unidades de todas las magnitudes que no son fundamentales, sino derivadas, resultan de la definición de cada magnitud y se pueden expresar en términos de las unidades de las magnitudes fundamentales.

Magnitudes derivadas

Son magnitudes definidas a partir de las magnitudes fundamentales del SI.

Hemos hablado en la actividad 1.13 de la magnitud masa y de la unidad en que se mide, el kilogramo, que se simboliza por kg. Ya han aparecido en este módulo tres de las siete magnitudes fundamentales del SI y las correspondientes unidades, que se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Magnitudes fundamentales del SI de interés en mecánica

Magnitud fundamental SI	Unidad SI	Símbolo
Espacio, distancia, longitud	metro	m
Tiempo	segundo	s
Masa	kilogramo	kg

Para los problemas que abordaremos en mecánica, las magnitudes derivadas que convendría introducir serán magnitudes derivadas de las tres anteriores, longitud, masa y tiempo. En la actividad 1.13 ya hemos hablado de algunas magnitudes derivadas: superficie (que se mide en m^2), volumen (m^3) y densidad (kg/m^3). En el apartado 4 veremos cómo se mide la magnitud fuerza.

1.8. Recapitulación

¿Qué hemos aprendido a hacer en este apartado? En cada subapartado hemos sacado unas conclusiones breves y hemos resaltado lo que hemos tratado en ellas. En esta revisión general, recordaremos las más esenciales.

Hemos visto ejemplos de lenguajes verbal, algebraico, gráfico y tabular que utiliza la ciencia para hacer descripciones de movimientos o, en general, para describir los procesos de interés. Se pueden utilizar todos a la vez para hacer una descripción más completa.

Hemos introducido el concepto de *modelo* para hablar de simuladores de procesos físicos por ordenador. En el apartado siguiente hablaremos del modelo de partícula puntual y de otros modelos que utiliza la física.

Hemos visto que hay magnitudes físicas fundamentales, como el tiempo, la longitud y la masa, y magnitudes derivadas, como la velocidad, el volumen o la densidad. Las magnitudes se miden en unidades del Sistema Internacional de unidades (SI) y las tres magnitudes fundamentales que aparecen en mecánica, tiempo, longitud y masa, se miden en segundos, metros y kilogramos, respectivamente.

El experimento de caída libre, con la expresión que permite calcular el tiempo que tarda en caer un objeto, nos ha permitido introducir el concepto de ecuaciones de movimiento o leyes de movimiento, y hemos comentado los tres tipos de movimientos básicos que puede hacer un cuerpo: rotacional, translacional y vibracional. También hemos visto que los movimientos pueden ser en una, dos o tres dimensiones.

Hemos comenzado el estudio de la cinemática. Hemos introducido algunos conceptos, como *velocidad* y *aceleración*, que aún tenemos que definir de manera precisa. Lo haremos en el apartado siguiente, donde trataremos los movimientos de forma cuantitativa. En el apartado 3 comenzaremos a abordar la dinámica y nos plantearemos el problema de cuáles son las causas de los movimientos.

1.9. Problemas de ampliación

Problema 1.1. Descripción de movimientos

Vamos conduciendo un coche por una pendiente y levantamos el pie del acelerador. El vehículo continúa subiendo. ¿Por qué? Pisamos el freno y el vehículo se detiene poco a poco. ¿Por qué?

¿Se pueden describir estos procesos con los conceptos que hemos visto en este apartado? Nota: se trata únicamente de un ejercicio de uso del lenguaje verbal cualitativo, descriptivo.

Problema 1.2. Gráficas desplazamiento-tiempo

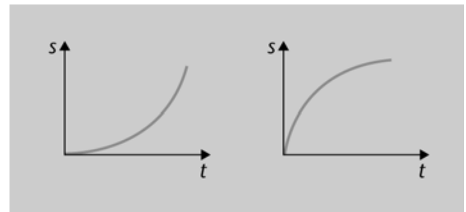
Describid qué tipo de movimiento indican las gráficas siguientes:

Figura 19. Gráficas desplazamiento-tiempo de tres movimientos

Problema 1.3. Gráficas desplazamiento-tiempo

¿Qué movimientos indican las gráficas desplazamiento-tiempo siguientes?

Figura 20. Gráficas desplazamiento-tiempo de dos movimientos



Problema 1.4 (opcional). Parámetros de un problema de movimientos

Si tenéis tiempo, id a la página de Internet mencionada en la figura 15. Activad la simulación y modificad los parámetros. Investigad por qué en algunos casos el carrito no acaba el trayecto y en otros casos llega a descarrilar.

Problema 1.5. Dimensiones de los movimientos básicos

¿Con cuántas variables podemos describir los movimientos representados en la figura 8?

2. Conceptos de cinemática

El objetivo principal de este apartado es formalizar los conceptos básicos de cinemática que hemos discutido en el apartado anterior.

Como hemos dicho en el apartado 1, la **cinemática** es la parte de la **mecánica** que estudia cómo analizar y describir los movimientos de los objetos, pero sin tener en cuenta cuál es su origen. En el apartado 1 hemos hecho una aproximación cualitativa de la cinemática; aquí comenzaremos a definir conceptos básicos que nos permitirán describir cuantitativamente los movimientos. Precisaremos conceptos de uso corriente, como distancia, desplazamiento, espacio recorrido, posición, velocidad, aceleración, etc., para que no se presten a confusiones cuando se utilicen en contextos científicos.

Hemos visto también en el apartado 1 ejemplos de descripciones de movimientos basadas en los lenguajes verbal, gráfico, algebraico y tabular. En este apartado insistiremos en la importancia de aprender a utilizar los diversos lenguajes.

Veremos cómo pueden deducirse las leyes de movimiento a partir del conocimiento de la aceleración de un objeto. Como ejemplo de aplicación, volveremos al movimiento de caída libre que hemos visto en el apartado 1 y determinaremos las leyes del movimiento de un objeto que cae.

Partículas y modelos

Cuando hablamos de un objeto en movimiento, a menudo bastará pensar en términos de una "partícula" que se mueve. Una partícula ideal es un punto que concentra toda la masa de un objeto.

Físicamente, y en cuanto a cuestiones de cinemática, podemos decir que una **partícula** o **punto material** puede ser cualquier objeto, pequeño o grande, del cual puede describirse su posición en el espacio mediante las coordenadas de un solo punto.

La partícula o el punto material es un ejemplo de **modelo** físico. Un modelo es una representación idealizada de la realidad.

Por ejemplo, una partícula puntual situada en el centro de la Tierra, y que contenga toda la masa de la Tierra, puede representar la Tierra en su movimiento alrededor del Sol. Un punto puede representar también una pelota que lanzamos al aire o un vehículo que se mueve por una carretera. Normalmente situa-

mos el punto en el centro de gravedad del objeto, en el punto donde uno puede imaginarse que se concentra toda su masa. El concepto de partícula nos permite estudiar la cinemática de los objetos de manera más sencilla.

En este módulo utilizaremos los términos *partícula*, *cuerpo* y *objeto* como sinónimos.

¿Qué aprenderemos?

- Aprenderemos a definir (verbal y algebraicamente) conceptos importantes como los de velocidad y aceleración.
- Aprenderemos a deducir las leyes del movimiento en situaciones sencillas.

¿Qué supondremos?

Utilizaremos los conceptos de derivada e integral, que se estudian en la asignatura de matemáticas. También daremos por conocida el álgebra vectorial básica, aunque aquí recordaremos sólo lo que más nos interese.

2.1. Distancias y desplazamientos

Comenzaremos comentando la diferencia entre valores de una magnitud e intervalos de la misma magnitud. Ejemplificaremos, con el caso del lanzamiento vertical de un objeto, que debemos ser cuidadosos acerca de qué magnitudes representamos en una gráfica y con qué objetivo.

2.1.1. Tiempo e intervalo de tiempo; posición y distancia

Una cosa es decir que son las 11 horas y otra es decir que un barco ha tardado 11 horas en llegar. En el primer caso estamos hablando de un instante de tiempo concreto (medido desde la medianoche) y en el segundo se trata de un intervalo de tiempo medido desde cualquier origen de tiempo. Un intervalo de tiempo se representa de la manera siguiente:

$$\Delta t = 11 \text{ h} \tag{57}$$

y se lee “delta de t igual a 11 horas”, mientras que el instante de tiempo se escribe:

$$t = 11 \text{ h} \tag{58}$$

Un intervalo de tiempo puede tener el inicio en cualquier momento (por ejemplo, por la mañana o por la tarde).

Un intervalo de una magnitud es una variación de esta magnitud entre dos puntos, que no tienen por qué contener el origen.

Lo mismo podemos decir de la posición de un punto sobre una recta, por ejemplo el eje *X*, y de la distancia recorrida: no es lo mismo decir que estamos en el punto kilométrico 74,5 km, que decir que hemos recorrido 74,5 km. De manera análoga al tiempo, lo representaremos de la manera siguiente:

$$x = 74{,}5 \text{ km} \tag{59}$$

$$\Delta x = 74{,}5 \text{ km} \tag{60}$$

El intervalo Δx = 74,5 km puede ir, por ejemplo, desde el punto x = 3 km al punto x = 77,5 km o del punto x = –40,5 km al punto x = +34 km.

En una expresión matemática se suelen distinguir los símbolos de las magnitudes, que se escriben en cursiva, de los símbolos de sus unidades, que se escriben en letra normal (redonda). Fijaos en la ecuación (57), por ejemplo, en la que la magnitud tiempo se escribe en cursiva, *t*, y el símbolo de hora, h, en letra redonda, sin cursiva.

Para una magnitud cualquiera *s*, diremos que el incremento de la magnitud *s* entre los puntos del espacio 1 y 2, en los cuales la magnitud toma los valores s_1 y s_2, es:

$$\Delta s = s_2 - s_1 \tag{61}$$

Es decir, un intervalo de una magnitud es la diferencia entre dos valores de la magnitud, el valor del extremo final del intervalo (donde acaba el intervalo) menos el valor del extremo inicial (donde se inicia el intervalo). Un intervalo puede ser positivo o negativo.

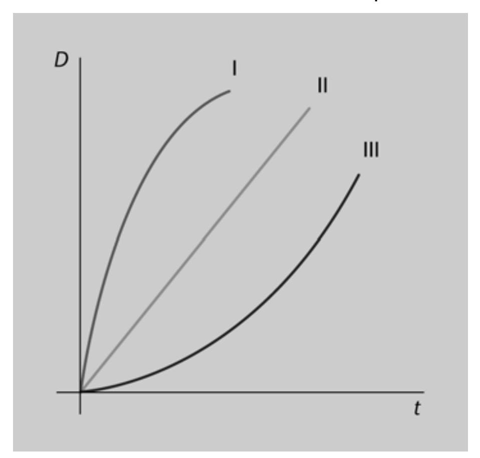
También es diferente el término *posición* del término *desplazamiento*. Veámoslo mediante el ejemplo siguiente.

2.1.2. Lanzamiento vertical

Un ejemplo en el que se pueden diferenciar claramente los conceptos de posición y desplazamiento es el lanzamiento de una pelota verticalmente. Cuando la hemos lanzado hacia arriba y al cabo de unos instantes nos vuelve a las manos, la pelota ha recorrido una distancia de subida y de bajada, pero la posición inicial y final son la misma: en el proceso no ha habido un desplazamiento claro (o resultante) de la pelota, aunque ha hecho un recorrido.

Si hacemos una gráfica de este movimiento de lanzamiento vertical de la pelota y de regreso a las manos, hemos de expresar que, a medida que pasa el tiempo (*t*), la distancia recorrida (*D*) va en aumento. ¿Cuál de las 3 gráficas de la figura 21 puede ser la correcta?

Figura 21. Tres ejemplos de curvas que representan una distancia recorrida que aumenta monótonamente con el tiempo



Función monótona

Decimos que una función es monótona *creciente* cuando para valores crecientes de la variable independiente, la variable dependiente también crece.

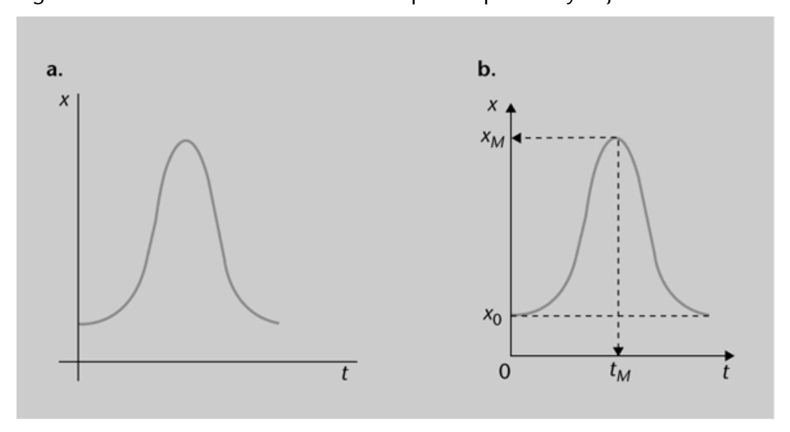
Sin más detalles sobre la teoría que describe el movimiento de la pelota que lanzamos verticalmente, cualquiera de las tres gráficas de la figura 21 puede ser correcta, porque sólo sabemos que la distancia recorrida aumenta monótonamente con el tiempo: a medida que pasa el tiempo, la distancia total que recorre la pelota en el movimiento hacia arriba y hacia abajo va en aumento.

Y ¿qué ocurre con la función que describe la posición que ocupa la pelota en cada instante?

2.1.3. Posición en función del tiempo en el lanzamiento vertical

Si hacemos una gráfica que represente dónde está la pelota en cada momento, es decir, la posición que ocupa en cada instante, y tomamos el eje X de manera que $x > 0$ en la dirección vertical y hacia arriba, la gráfica posición-tiempo que representa el movimiento de ascenso y descenso de la pelota puede ser como la de la figura 22a: la pelota está cada vez más alta a medida que pasa el tiempo y, después de llegar a la altura máxima, comienza a bajar.

Figura 22. Posición en cada instante de la pelota que sube y baja



a. Gráfica cualitativa. **b.** Gráfica cualitativa en la que se indican algunos puntos de interés del proceso y se ha puesto la flecha en el extremo de cada eje de coordenadas.

Además de mostrar el sentido en el que aumentan los valores de la abscisa y la ordenada con una flecha en el extremo de cada eje, en la figura 22b hemos querido mostrar determinados aspectos del proceso que no aparecen en la figura 22a, como que:

1) comenzamos a contar el espacio en $x = 0$ y el tiempo en $t = 0$; por lo tanto, x_0 representa la posición inicial desde la que se lanza la pelota;

2) el punto de partida y el de llegada son el mismo (están a la misma altura), y lo queremos resaltar con una línea horizontal discontinua.

3) el instante t_M es el momento en el que la posición alcanza el valor máximo, x_M, y la velocidad de la pelota se anula.

Si comparamos las gráficas de desplazamiento, $D(t)$, en la figura 21, y de posición, $x(t)$, en la figura 22a, veremos que son diferentes, aunque representen el mismo proceso físico de subida y bajada de una pelota. Mientras que la función $D(t)$ es monótona creciente, la función $x(t)$ no lo es, sino que tiene tramos crecientes y tramos decrecientes, y pasa por un máximo.

Instantáneo

Instantáneamente quiere decir en un instante de tiempo dado, es decir, para un valor de t.

Por lo tanto, debemos ser cuidadosos con lo que queremos representar en una gráfica determinada y saber interpretar lo que se quiere transmitir.

Hay que tener en cuenta que hemos dibujado la figura 22 sin basarnos en ninguna consideración teórica, y simplemente teniendo en cuenta el hecho de que la pelota sube y baja. Más adelante veremos si la curva concreta que hemos dibujado en la figura 22 puede ser cualitativamente correcta. Volveremos sobre la gráfica de la figura 22 y discutiremos, por ejemplo, la pendiente de la curva $x(t)$ y su curvatura. Veremos si representa bien el hecho que conocemos, que la pelota se va frenando a medida que sube, se detiene instantáneamente en el punto más alto de la trayectoria y a continuación vuelve a caer y aumenta su velocidad gradualmente. Como se ha dicho antes respecto a la figura 21, hasta que no tengamos una teoría válida sobre el movimiento de la pelota (o si no hacemos un experimento en el que se midan las posiciones y velocidades de la pelota en cada instante), no podemos afirmar si la gráfica cualitativa de la figura 22 es correcta o no.

Ahora comentaremos como varía la velocidad de la pelota en el movimiento vertical.

Actividad 2.1. Gráficas de lanzamiento vertical

a) Exponed algún argumento para descartar la línea recta de la figura 21 como curva distancia-tiempo correcta (recordad lo que se comentó con respecto a la figura 22).

b) Haced un esquema de cómo podría ser la gráfica velocidad-tiempo para el movimiento de lanzamiento vertical.

Solución

a) Hemos dicho que la pelota lanzada hacia arriba se va frenando hasta que se detiene en el punto más alto de la trayectoria. Por lo tanto, la velocidad del movimiento de subida y de bajada no es constante y la distancia recorrida no puede ser proporcional al tiempo, no podemos escribir que $D \propto t$. Solamente para un movimiento a velocidad constante correspondería una variación $D(t)$ lineal.

b) La pelota comienza el movimiento con una velocidad inicial que se va reduciendo hasta que en el instante t_M y en el punto x_M se anula y después vuelve a aumentar, pero en sentido contrario. Cualitativamente, podemos hacer la gráfica de la figura 23. Hemos supuesto que las velocidades de ascenso son positivas y que las velocidades de descenso son negativas.

Figura 23

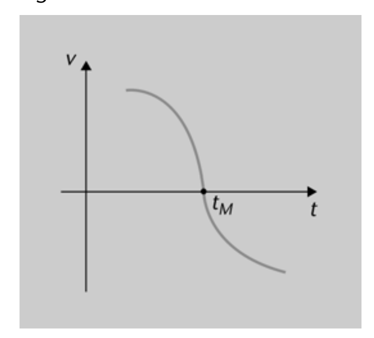


Figura 23

Velocidad de una pelota que lanzamos verticalmente y recogemos en el mismo punto cuando cae. En el instante $t = t_M$ la pelota está parada en el punto más alto de la trayectoria.

2.1.4. ¿Qué hemos aprendido?

- Hemos aclarado la diferencia entre tiempo e intervalo de tiempo y entre posición y desplazamiento.
- Hemos visto que el aspecto de una gráfica correspondiente a un proceso físico puede ser diferente según lo que se represente.

El concepto cinemático más básico es el de velocidad, que se construye a partir de posiciones o desplazamientos que varían con el tiempo. Veámoslo.

2.2. La velocidad

De un objeto que se mueve, no sólo nos interesa la posición que ocupa sino también con qué velocidad se mueve. ¿Cómo definimos la velocidad de un objeto que se mueve? Comenzaremos hablando del concepto de velocidad media para llegar a continuación a la definición de velocidad instantánea.

2.2.1. Velocidad media

La velocidad de un vehículo es el espacio que recorre por unidad de tiempo. Si recorremos una distancia de 100 km en 4 h, podemos decir que hemos viajado a una velocidad media de 100 km / 4 h = 25 km/h.

Valor medio $\langle f \rangle$

La notación $\langle f \rangle$ representa el valor medio de la magnitud f.

En general, representamos con s el espacio recorrido por un objeto, con t el tiempo que ha tardado a recorrerlo y con $\langle v \rangle$ la velocidad media correspon-

diente; Δt y Δs (que se leen "delta te" y "delta ese") son, respectivamente, el incremento de tiempo y el incremento de desplazamiento causados por el movimiento. La expresión siguiente *define* la velocidad media:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{62}$$

La velocidad media de un cuerpo que se ha desplazado un intervalo delta ese durante un tiempo delta te se calcula como el cociente entre el espacio que ha recorrido y el tiempo que ha tardado en recorrerlo.

Velocidad media

A veces se representa un valor medio con una raya encima de la variable, $\bar{v}$, pero por no inducir a confusiones con el símbolo de flecha, que representa una magnitud vectorial, utilizaremos aquí el símbolo $<v>$.

Es muy importante que aprendamos a definir correctamente las magnitudes. Por ejemplo, sería incorrecto decir lo siguiente, respecto a la ecuación (62):

La velocidad media de un cuerpo que se ha desplazado un intervalo delta ese durante un tiempo delta te es igual al espacio que ha recorrido el cuerpo en un tiempo (o en este tiempo).

La única diferencia esencial entre los dos enunciados es que se ha sustituido "por unidad" de tiempo por "en un tiempo". No es correcto el segundo enunciado porque estaríamos diciendo que una velocidad *es* un cambio de posición (o un desplazamiento), y entonces la velocidad sería una magnitud que se mediría con las mismas unidades que el desplazamiento. No es lo mismo decir "espacio recorrido *en un* intervalo de tiempo" que "espacio recorrido *por unidad* de tiempo". Con "por" en la segunda expresión se indica que hay un cociente.

En conclusión, la magnitud *velocidad media* tiene el significado siguiente:

La velocidad media de un objeto que se ha desplazado Δs durante un tiempo Δt es el espacio que ha recorrido el objeto por unidad de tiempo.

Por lo tanto, la velocidad es una magnitud nueva, obtenida mediante un cociente a partir de las magnitudes desplazamiento y tiempo, y que tiene dimensiones (y unidades de medida) diferentes de las de espacio y de las de tiempo. Decimos que la magnitud velocidad es una *magnitud derivada*, mientras que el espacio y el tiempo son *magnitudes fundamentales*.

Magnitud derivada y función derivada

Una magnitud derivada es la que se define a partir de las magnitudes fundamentales del SI.

Una función derivada es la que se define como un cociente de diferenciales.

La velocidad es una magnitud derivada y se define a partir de la función derivada del espacio recorrido con respecto al tiempo, como veremos en el subapartado 2.2.2.

Como los desplazamientos y los tiempos se miden en el SI en metros (m) y segundos (s), respectivamente, la unidad del SI de la velocidad será metros por segundo (m/s).

Veremos más adelante que la descripción completa de la magnitud velocidad es más complicada, porque una velocidad siempre indica un movimiento en alguna dirección.

Actividad 2.2. Significado del valor medio de la velocidad

a) En una carretera recta, un vehículo recorre 100 km hacia el este en 2 h, i desde aquel punto hace 200 km hacia el oeste en 2 h más. ¿A qué velocidad media ha hecho los 300 km? ¿A qué distancia del punto original acaba el recorrido?

b) ¿Qué significado tiene la expresión (62)? (recordad el concepto de valor medio del subapartado 1.6.1).

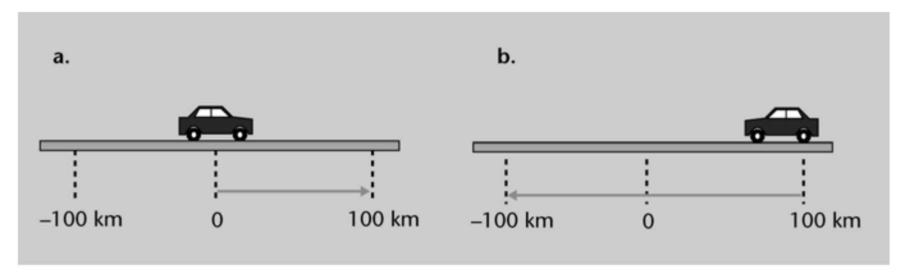
Solución

a) El vehículo ha recorrido 300 km en 4 h. Por lo tanto, ha viajado a una velocidad media de 75 km/h:

$$< v > = \frac{300\,\text{km}}{4\,\text{h}} = 75\frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{63}$$

Si representamos el desplazamiento en un eje, el vehículo acaba a 100 km al oeste del punto de partida, como en la figura 24.

Figura 24. Desplazamiento y posición del vehículo



a. Desplazamiento inicial. **b**. Segundo desplazamiento.

b) La velocidad media de un objeto que recorre un trayecto determinado durante un tiempo determinado es la velocidad que debería tener si ésta fuera constante y recorriera el mismo trayecto total en el mismo tiempo total.

En un desplazamiento dado, podéis calcular diversas velocidades medias: si habéis viajado de Barcelona a Alicante (B-A, pongamos unos 600 km para redondear) y habéis tardado 6 h en recorrer los 600 km, podéis decir que la velocidad media en este trayecto ha sido:

$$< v >_{\text{B-A}} = \frac{600\text{ km}}{6\text{ h}} = 100\frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{64}$$

Pero si el primer tramo de 100 km del viaje, de Barcelona a Tarragona (B-T), lo habéis recorrido en 75 minutos (5/4 de hora), podéis decir que la velocidad media en esta parte del trayecto ha sido:

$$< v >_{\text{B-T}} = \frac{100\text{ km}}{5/4\text{ h}} = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{65}$$

Por lo tanto, en esta parte del trayecto, B-T, habéis viajado a una velocidad media inferior a la del trayecto B-A. Y como no es posible mantener una velocidad idéntica en todo momento, es posible que en el trayecto inicial de 100 km hayáis conducido (por lo menos en algunos momentos) a, por ejemplo, 120 km/h. Igualmente, podríais encontrar trayectos en los que la velocidad media durante algunos intervalos de tiempo haya sido cualquier valor entre 0 y 100 km/h, por ejemplo.

Con estas ideas ya tenemos herramientas para definir el concepto de velocidad instantánea y discutir su significado físico y geométrico.

2.2.2. Velocidad instantánea

Cuando nos referimos a la velocidad de un objeto podemos estar hablando de la velocidad media, de la velocidad máxima, de la velocidad límite, de la velocidad mínima, etc. Pero si no lo especificamos, se sobreentiende que hablamos de la velocidad instantánea. ¿Cómo se define esta velocidad?

Velocidad límite e instantánea

En algunos procesos la velocidad de una partícula alcanza un valor que no rebasa, como en la caída de un paracaidista. Es lo que se conoce como *velocidad límite*.

Una velocidad instantánea en un instante t es una velocidad media calculada en un intervalo que hacemos cada vez más pequeño alrededor de t.

Pensemos, primero, en una partícula que se mueve en una dimensión. La variable x basta para describir la posición de la partícula sobre una línea recta. Si una partícula puntual se mueve de manera que está en la posición x en un instante de tiempo t, la posición instantánea viene dada por la función matemática $x(t)$. Luego, la velocidad instantánea de esta partícula, es decir, la velocidad que tiene la partícula en el instante t, se define de la manera siguiente:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (66)$$

La expresión anterior de la **velocidad instantánea** se lee así:

La velocidad instantánea de un objeto es la derivada de la posición con respecto al tiempo.

La velocidad instantánea tiene, como toda velocidad, el significado de espacio recorrido por unidad de tiempo.

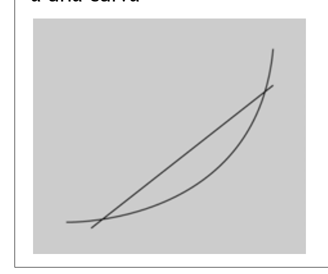
Recordad que, matemáticamente, una derivada se calcula como el paso al límite de un cociente de incrementos:

$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (67)$$

Secante

La recta de la figura es una secante a la línea curva porque la corta en dos puntos.

Figura 25. Recta secante a una curva



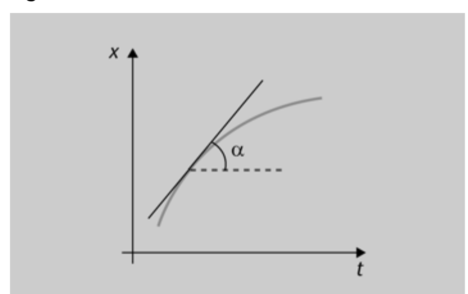
El cociente incremental $\Delta x/\Delta t$ es más que una velocidad media, ecuación (62). Por lo tanto, para calcular una velocidad instantánea debemos calcular una velocidad media en un trayecto muy, muy corto; matemáticamente, a partir de un trayecto que hacemos en un incremento de tiempo que tiende a cero.

Ahora haremos tres actividades para reforzar el concepto de velocidad instantánea. Primero recordaremos el significado geométrico de la derivada y después aprenderemos a representar la velocidad instantánea y a calcularla.

Actividad 2.3. Tangentes a la trayectoria

A partir de la gráfica de la posición de una partícula en función del tiempo, explicad el significado geométrico de la función derivada, es decir, que la velocidad es la pendiente de la recta tangente a la posición instantánea de la partícula (figura 26).

Figura 26



Letras griegas

Las letras griegas α, β y φ se leen *alfa*, *beta* y *fi*, respectivamente.

Figura 26

La recta tangente a la curva $x(t)$ en un punto forma un ángulo α con la horizontal. La tangente trigonométrica de este ángulo es la derivada de la función en este punto.

Solución

La figura 28 muestra la posición instantánea de la partícula. En el instante t ocupa la posición x y al cabo de un incremento de tiempo Δt la partícula está en $x + \Delta x$. Los intervalos Δx y Δt forman un triángulo rectángulo con el segmento de secante de la curva, figura 28. Recordemos que la función trigonométrica *tangente* de un ángulo, como el ángulo β de la figura 28, es el cociente del cateto opuesto al ángulo por el cateto contiguo, es decir, el cociente de incrementos:

$$\tan \beta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (68)$$

Este cociente es la velocidad media de la partícula que recorre la distancia Δx en el tiempo Δt.

Pero estamos interesados en la velocidad instantánea de la partícula en el instante t. Luego, debemos hacer el incremento Δt cada vez más pequeño. En el límite, este proceso nos llevará de las rectas secantes de la curva de la figura 28 a la recta tangente a la curva en el punto x. Y el ángulo β tiende al ángulo α.

En la figura 25 se muestra también que la recta tangente a la curva en el punto x forma un ángulo α con la horizontal y la derivada de la función en este punto es el valor de la tangente de este ángulo:

$$\tan \alpha = \frac{dx}{dt} \qquad (69)$$

El resultado anterior se obtiene de tomar el límite para $\Delta t \to 0$ en la expresión (68). El triángulo rectángulo está formado por los catetos dx y dt y la recta tangente a la curva.

Tangente trigonométrica

En un triángulo rectángulo, la tangente del ángulo que forma la hipotenusa con uno de los catetos es el cociente del segundo cateto por el primer cateto,

$$\tan \varphi = a/b$$

Figura 27. Definición de la tangente de un ángulo.

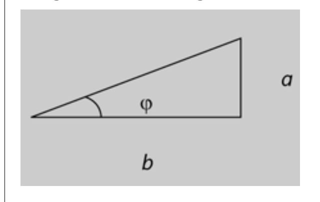
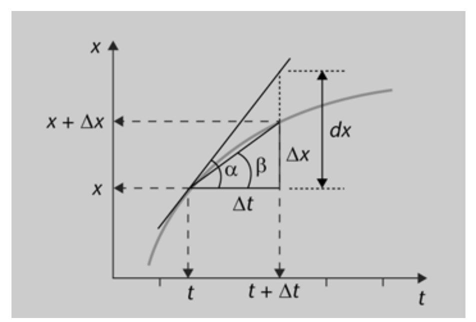


Figura 28. Función posición-tiempo y significado geométrico de la función velocidad media y velocidad instantánea para un movimiento unidimensional



Por lo tanto, pendiente y velocidad instantánea están relacionadas: la pendiente de la recta tangente a la curva en la posición $x(t)$ indica el valor de la velocidad instantánea de la partícula.

Veamos un ejemplo.

Actividad 2.4. Representación de la velocidad

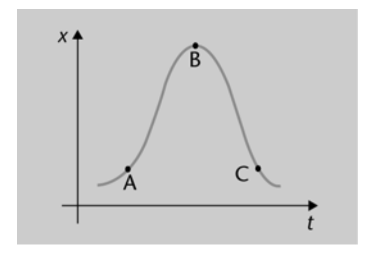
Para una gráfica $x(t)$ como la de la figura 22:

a) Representad gráficamente la velocidad de la partícula en tres puntos, como A, B y C en la figura 29. Explicad el valor relativo y el sentido de la velocidad (de subida o de bajada).

b) Si ahora pensamos en el movimiento de una pelota que lanzamos verticalmente y volvemos a recuperarla cuando regresa a nuestras manos, ¿podemos decir si una gráfica $x(t)$ como la de la figura 29 es una buena descripción del movimiento de la pelota? (pensad en la velocidad que tiene una pelota durante la subida y la bajada).

c) Proponed una función $x(t)$ que represente mejor la posición de una pelota que lanzamos verticalmente y vuelve a las manos.

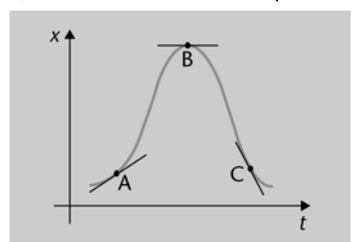
Figura 29. Tres instantes de una curva posición-tiempo como la de la figura 22



Solución

a) En la figura 30 hemos dibujado la recta tangente a la curva de la figura 29 en los tres puntos indicados.

Figura 30. Rectas tangentes a la curva $x(t)$ en tres instantes de tiempo



Vemos en la figura 30 que la velocidad en el punto superior B es nula (la recta tangente es horizontal y tan 0° = 0) y que en el punto A la velocidad es menor (en valor absoluto) que en el punto C (menor pendiente de la recta tangente en A). En A la partícula está subiendo (pendiente positiva) y en C, bajando (pendiente negativa). ¿Cómo sabemos que la velocidad en C es en sentido descendente? Porque la posición x disminuye a medida que pasa el tiempo, y esto hace que las pendientes de las rectas tangentes a la función $x(t)$ sean negativas. Veámoslo con más detalle.

Se puede ver en la definición de velocidad (ecuación 67) que velocidades negativas corresponden a movimientos en el sentido descendente del eje X (figura 31). En efecto, si la partícula está en la posición x_1 en el instante t_1, y al pasar un intervalo de tiempo Δt positivo ($\Delta t > 0$) la partícula está en una posición más baja, $x_2 = x_1 + \Delta x$, con $\Delta x < 0$, (y por lo tanto $x_2 < x_1$), entonces el cociente $\Delta x/\Delta t$ será negativo por ser el cociente de dos números de signo contrario, $\Delta t > 0$ y $\Delta x < 0$. Lo mismo ocurrirá para la velocidad instantánea. Ésta se calcula como el límite del cociente incremental $\Delta x/\Delta t$, que siempre es negativo en el movimiento descendente y, por lo tanto, $v = dx/dt < 0$.

Figura 31. Movimiento descendente

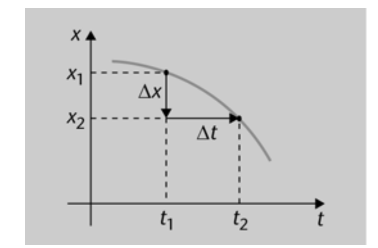


Figura 31

La posición decrece a medida que pasa el tiempo, y la velocidad es negativa.

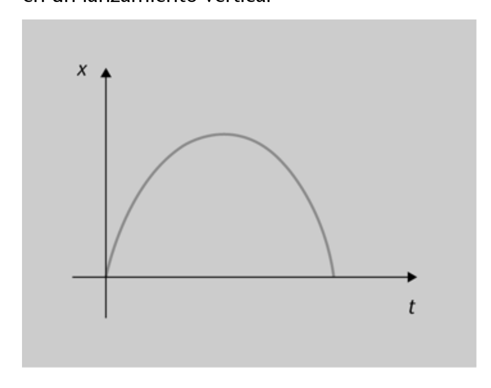
Tenemos, pues, un signo para las componentes de la velocidad: la velocidad es negativa en un movimiento descendente en el que la dirección positiva del eje tiene el sentido hacia arriba.

b) La pelota sale con una velocidad determinada de la mano que la lanza y se va frenando mientras sube, hasta que se detiene instantáneamente a una altura determinada, y a continuación comienza a caer a una velocidad cada vez mayor. Podemos suponer que la gráfica cualitativa de la velocidad de la pelota es como en la figura 23, pero podemos asegurar que una curva $x(t)$ como la de la figura 22 o la figura 29 no puede representar el movimiento de subida y bajada de la pelota, porque entre los puntos A y B de la figura 29 la velocidad comienza con un valor pequeño y va en aumento: la función tiene cada vez más pendiente hasta que cerca del punto B la velocidad se reduce de nuevo.

Por lo tanto, la gráfica cualitativa de la figura 22 o 29 no puede representar el movimiento de ascenso y de descenso de la pelota. Veamos cuál podría ser la forma correcta.

c) La función $x(t)$ que buscamos debe tener un máximo en la posición en la que la pelota llega al punto más alto. Y la pendiente de la curva debe decrecer monótonamente hasta anularse en el mismo punto. Por lo tanto, una gráfica cualitativa más correcta sería la de la figura 32. Hemos supuesto que la función es simétrica (la pelota tiene el mismo comportamiento subiendo que bajando) y hemos situado el origen de coordenadas en el punto en el que se lanza la pelota.

Figura 32. Dependencia con el tiempo de la posición de una pelota que sube y baja en un lanzamiento vertical



Si trazamos rectas tangentes a la curva de la figura 32 en puntos crecientes veremos que la pendiente se va reduciendo desde un valor inicial hasta el valor nulo en el pico de la curva; a continuación, la pendiente comienza a tomar valores negativos cada vez mayores, e idénticos en valor absoluto a los de la subida (porque la curva es simétrica).

Como vemos, a partir del análisis de la pendiente de la curva que da la posición instantánea de la partícula, se puede describir cualitativamente el movimiento en términos de la velocidad instantánea. El cálculo cuantitativo de la velocidad implica calcular la función derivada de la posición, ecuación (66). Veamos un ejemplo sencillo.

Actividad 2.5. Cálculo de la velocidad

La posición que ocupa una partícula en función del tiempo transcurrido viene dada, para $t \geq 0$, por la función:

$$x(t) = 6 \cdot t^2 + 5 \tag{70}$$

donde x se mide en metros y t en segundos.

a) Calculad la función que da la velocidad de la partícula en cualquier instante, y en el instante particular $t = 5$ s.

b) ¿En qué unidades se mide la constante "6" de la ecuación (70)? ¿Y la constante "5"?

c) Representad esquemáticamente las funciones $x(t)$ y $v(t)$.

d) ¿Qué movimiento representa esta función $x(t)$?

¿Cómo se lee la expresión *u′(t) = du/dt*?

$u'(t)$ se lee "u prima de te", y du/dt es la derivada de u con respecto a t.

No es correcto decir que du/dt es la derivada de u partido por la derivada de t.

Pero sí que es correcto decir que du/dt es el cociente del diferencial de u por el diferencial de t, porque du y dt se pueden tratar como funciones. Podemos escribir, por ejemplo, que $du = u' \cdot dt$.

Solución

a) La velocidad instantánea es la derivada de la posición con respecto al tiempo (ecuación 67):

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 12t \tag{71}$$

y, para el instante $t = 5$ s:

$$v(5\,\mathrm{s}) = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{s} = 60\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{72}$$

b) Como el tiempo se mide en segundos y la posición en metros, la constante "6" en la ecuación (70) se debe medir en m/s^2, de manera que al calcular el producto $6t^2$ para un t dado obtengamos el resultados en metros. Análogamente, "5" debe estar expresado en metros.

c) En la figura 33 se representan esquemáticamente las funciones posición y velocidad, ecuaciones (70) y (71).

La posición aumenta con el tiempo de manera cuadrática y la velocidad aumenta linealmente.

Figura 33

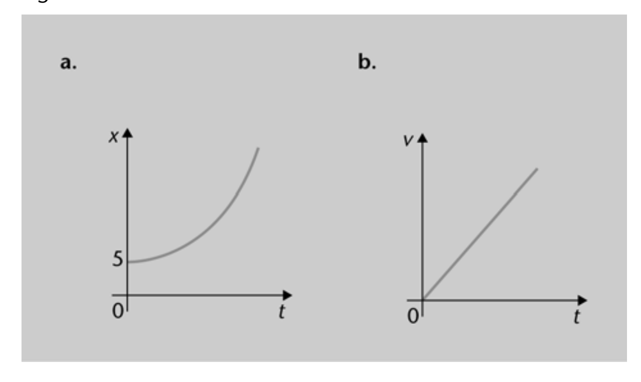


Figura 33

Diagrama cualitativo de la evolución temporal de: **a.** la posición $x(t) = 6 \cdot t^2 + 5$, ecuación 70, i **b.** la velocidad $v(t) = 12 \cdot t$, ecuación 71.

d) El movimiento representado por la función (70) es el de una partícula que en el instante inicial tiene velocidad nula y está en la posición $x = 5$ m; a medida que pasa el tiempo, aumenta la velocidad. Esto hace que se aleje cada vez más deprisa del punto $x = 5$ m, en que estaba inicialmente.

En el caso de funciones $x(t)$ más complicadas el problema de calcular la velocidad de la partícula es un problema puramente matemático de cálculo de derivadas de funciones.

Hasta ahora hemos hablado de movimientos en una dimensión. ¿Qué ocurre en un movimiento más general?

2.2.3. Vector velocidad

La velocidad es una magnitud vectorial, porque para determinarla necesitamos dar tres valores numéricos: para determinar totalmente la velocidad de un objeto necesitamos dar su dirección y sentido del movimiento y la distancia que recorre por unidad de tiempo. O bien, podemos dar las componentes del vector velocidad en algún sistema de referencia.

Figura 34. Trayectoria de una partícula y vectores de posición y velocidad en un instante de tiempo

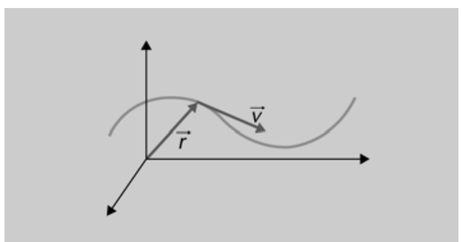


Figura 34

La velocidad instantánea en un punto tiene la dirección de la tangente a la curva que representa la trayectoria en ese punto.

En el caso general de un movimiento en tres dimensiones, en el que la posición de la partícula venga dada por la función $\vec{r}(t)$, figura 34, es decir, por el vector de posición de la partícula con respecto a un punto fijo del espacio, en realidad estamos dando tres funciones del tiempo:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \tag{73}$$

como ya hemos visto en la actividad 1.8 del apartado 1. Vectorialmente:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{74}$$

En cada situación podemos escoger las direcciones XYZ de la manera que más convenga para describir el movimiento. En el apartado 3 veremos un ejemplo.

Ya sabemos que hay una relación entre la pendiente de la curva posición-tiempo y la velocidad de la partícula. Lo mismo ocurre en una trayectoria tridimensional: hay una relación entre la **pendiente de la trayectoria** y la **velocidad**.

La velocidad de una partícula es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo.

Conocer la velocidad de la partícula, definida como la derivada temporal del vector de posición $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{75}$$

equivale, en la práctica, a trabajar con tres derivadas de funciones; los tres componentes del vector velocidad:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{76}$$

Explícitamente:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{77}$$

La expresión (77) es la generalización a un movimiento tridimensional de la expresión (66), válida para un movimiento unidimensional. La figura 34 representa una trayectoria cualquiera en el espacio (en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional), y el vector de posición y la velocidad de la partícula en un punto cualquiera. El vector velocidad instantánea tiene la dirección de la recta tangente a la trayectoria de la partícula en cada punto.

El cálculo de la velocidad implica calcular la derivada del vector de posición. Veamos un ejemplo.

Actividad 2.6. Velocidad

La posición instantánea de una partícula viene dada por el vector siguiente:

$$\vec{r}(t) = \left(4t^2, -t, 3\text{sen}(5t)\right) = 4t^2\vec{i} - t\vec{j} + 3\text{sen}(5t)\vec{k} \quad (78)$$

Fijaos en que en la expresión 78 hemos escrito el vector posición en dos notaciones diferentes, pero debéis tener presente que ambas significan lo mismo.

donde el tiempo t se mide en segundos, y la posición en metros.

a) Calculad la velocidad de la partícula.
b) Calculad también el módulo del vector posición y del vector velocidad.
c) ¿En qué unidades se miden las constantes 4, –1, 3 y 5 que aparecen en la expresión del vector de posición?

Solución

a) El vector velocidad se obtiene de derivar cada componente del vector de posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(8t, -1, 15\cos(5t)\right) = 8t\,\vec{i} - \vec{j} + 15\cos(5t)\vec{k} \quad (79)$$

b) El módulo de un vector cualquiera es la raíz cuadrada de la suma de las componentes del vector al cuadrado. De esta manera obtenemos, para el vector de posición:

$$|\vec{r}| = \sqrt{16t^4 + t^2 + 9\text{sen}^2(5t)} \quad (80)$$

y para la velocidad:

$$|\vec{v}| = \sqrt{64t^2 + 1 + 225\cos^2(5t)} \quad (81)$$

c) La componente primera de $\vec{r}$, $x = 4t^2$, debe dar un valor en metros cuando sustituimos un valor de t en segundos; entonces 4 debe medirse en m/s^2. De esta manera, la función $x = 4t^2$ es, esplícitamente:

$$x(\text{m}) = 4\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t(\text{s})^2 \quad (82)$$

y la derivada de esta función resulta:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \times 4\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t(\text{s}) \quad (83)$$

que en la ecuación (79) hemos escrito abreviadamente como $v_x = 8t$. Cuando demos un valor a t en segundos, por ejemplo t = 3 s, obtendremos las dimensiones correctas de la componente x de la velocidad:

$$v_x = 8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 3\,\text{s} = 24\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (84)$$

Análogamente, el factor –1 en $y = -t$ se medirá en m/s. Y en cuanto a la componente z del vector de posición, como las funciones trigonométricas no tienen dimensiones, el factor 3 en $z(t)$ debe medirse en metros. Finalmente, como el argumento de la función trigonométrica no puede tener dimensiones, es decir, $5t$ no tiene dimensiones por tratarse de un ángulo, entonces el factor 5 debe medirse en s^{-1}.

Módulo de un vector y vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

El módulo del vector

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

es la "longitud" del vector,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

es decir, la distancia desde el origen hasta el extremo del vector.

Los vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tienen módulo unidad.

Por ejemplo:

$$|\vec{i}| = 1$$

porque

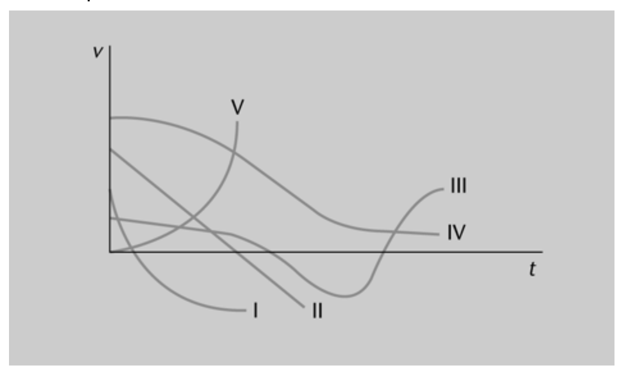
$$\vec{i} = (1,0,0)$$

Ahora discutiremos la velocidad en términos gráficos con un ejemplo.

Actividad 2.7. Gráficas *v*(*t*)

Una partícula se mueve a lo largo del eje *X*. Describid verbalmente el movimiento que corresponde a cada curva de la figura 35. Por ejemplo, en el caso V diríamos que el objeto parte del reposo ($v = 0$), y constantemente aumenta de velocidad, a un ritmo cada vez mayor.

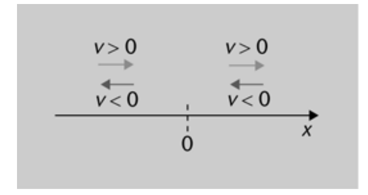
Figura 35. Velocidad de diferentes partículas en función del tiempo



Solución

Recordemos que para un movimiento a lo largo del eje *X* positivo, una velocidad positiva corresponde a un movimiento que se aleja del origen. También es positiva la velocidad de una partícula que se mueve hacia el origen desde valores negativos de la posición *x* (figura 36). La velocidad negativa se da cuando la partícula se acerca al origen desde valores positivos de la posición. También es negativa la velocidad si la partícula se aleja del origen desde valores negativos de la posición. Estos resultados se pueden explicar de la misma manera que hemos hecho en la figura 31, teniendo en cuenta el signo del cociente dx/dt. También lo podemos ver porque si el vector velocidad apunta en el sentido que hemos tomado como positivo en el eje, es positiva, y si apunta en el sentido contrario, es negativa.

Figura 36. Velocidades positivas y negativas en una dirección determinada



En resumen, las velocidades son positivas en el sentido creciente de la coordenada, y negativas en sentido contrario. Ahora ya podéis describir cualitativamente las funciones de la figura 35.

Curva I: La partícula inicia el movimiento con una velocidad determinada y positiva que va reduciéndose hasta que se anula; a partir de este momento la partícula se mueve en dirección contraria, porque la velocidad pasa a ser negativa. Además, la curva tiene una pendiente menor a medida que pasa el tiempo y, por lo tanto, la velocidad negativa aumenta (en valor absoluto) a un ritmo menor que antes de cambiar de signo.

Curva II: Ésta se parece al caso I, pero ahora la variación es lineal; la partícula inicia su movimiento con una velocidad determinada que se reduce linealmente hasta que se anula. A continuación, continúa moviéndose cada vez a mayor velocidad pero en sentido contrario, siempre con un aumento lineal de la velocidad con el tiempo.

Curva III: Hasta que llega al mínimo de la curva, la descripción de este movimiento es como la del caso I. Una vez llega al mínimo, es decir, a la velocidad máxima de la partícula en el sentido de las coordenadas decrecientes, la velocidad se va reduciendo hasta que se anula de nuevo; a partir de este momento, el sentido del movimiento es otra vez en el sentido de coordenadas crecientes y con una velocidad en aumento.

Curva IV: Es como la I pero sin que se llegue a anular la velocidad. La partícula tiene una velocidad positiva (en el sentido creciente de las coordenadas) que se reduce con el paso del tiempo; la reducción se hace más rápida durante un intervalo de tiempo, hasta que la velocidad se vuelve casi constante.

Ahora haremos otro ejercicio de cálculo cuantitativo de velocidades, teniendo en cuenta su carácter vectorial. Los resultados que obtendremos en el ejercicio siguiente permitirán deducir relaciones generales entre la posición instantánea de una partícula y la velocidad a la que se mueve. En particular, obtendremos relaciones sencillas para el movimiento circular. Al mismo tiempo, el ejercicio nos servirá para recordar conceptos como el de producto escalar de dos vectores y la derivación de productos de funciones.

Producto escalar de dos vectores

Si

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y

$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$,

entonces el producto escalar de los dos vectores es:

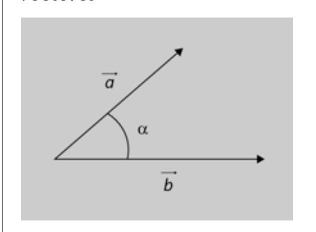
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

O, también:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Figura 37. Ángulo entre dos vectores



Actividad 2.8. Vector de posición y de velocidad

A partir del vector de posición para un punto cualquiera de la trayectoria de una partícula en el espacio:

$$\vec{r} = \vec{r}(x,y,z) \quad (85)$$

a) Calculad el producto escalar $\vec{r}\cdot\vec{r}$.

b) Demostrad que la expresión anterior también se puede escribir así, $\vec{r}\cdot\vec{r} = r\cdot r$, donde *r* es el módulo del vector de posición.

c) Demostrad que si derivamos con respecto al tiempo la expresión $\vec{r}\cdot\vec{r} = r\cdot r$, obtenemos:

$$\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = r\cdot\frac{dr}{dt} \quad (86)$$

d) Si ahora suponemos el caso particular del movimiento de una partícula alrededor de un círculo de radio *R*, ¿qué resultado obtendréis para los apartados b) y c)? Interpretad gráficamente el resultado c) para este caso particular.

Solución

a) El producto escalar del vector de posición por sí mismo da:

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = x^2 + y^2 + z^2 \quad (87)$$

Derivada de un producto

Si $y = u \cdot v$, y tanto u como v son funciones de otra variable x, entonces la derivada de y respecto de x es:

$$y' = u\cdot v' + u'\cdot v$$

b) Por otro lado, el módulo del vector de posición es:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (88)$$

Por lo tanto, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, que coincide con $\vec{r}\cdot\vec{r}$.

Otra forma de llegar es recordando la expresión equivalente del producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en términos del coseno del ángulo α que forman:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \quad (89)$$

Como dos vectores idénticos forman un ángulo de 0°, tenemos:

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = |\vec{r}||\vec{r}|\cdot\cos 0° = r\cdot r\cdot 1 = r^2 \quad (90)$$

c) La derivada del producto de ambos vectores o de ambos escalares:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{d}{dt}(r\cdot r) \quad (91)$$

da:

$$\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r} = r\frac{dr}{dt} + \frac{dr}{dt}\cdot r \quad (92)$$

y la conmutatividad del producto escalar de dos vectores (1.^{r} miembro de la expresión anterior) o del producto de dos funciones (2.º miembro) permite escribir que:

$$2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=2r\frac{dr}{dt} \qquad (93)$$

Y si recordamos la expresión (75) del vector velocidad, $\vec{v}=d\vec{r}/dt$, escribiremos:

$$\vec{r}\cdot\vec{v}=r\frac{dr}{dt} \qquad (94)$$

d) Para una partícula que se mueve alrededor de un círculo de radio *R* (figura 38), la distancia al centro de giro es constante, $|\vec{r}|=R$, y la expresión (90) es:

$$\vec{r}\cdot\vec{r}=R^2 \qquad (95)$$

Figura 38. Una partícula en movimiento circular de radio *R*

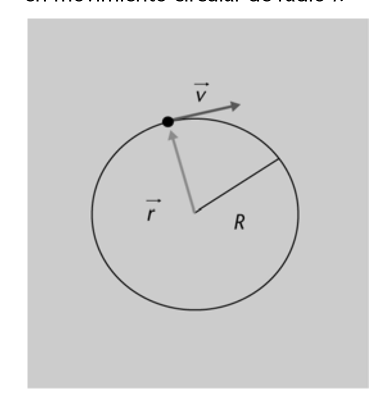


Figura 38

La dirección del vector velocidad en el caso de la figura indica que la partícula se mueve en sentido horario (es decir, en el sentido de las agujas de un reloj).

Por otra parte, la expresión (94) da:

$$\vec{r}\cdot\vec{v}=0 \qquad (96)$$

porque el módulo del vector de posición es constante y, por lo tanto, su derivada es nula, $dR/dt = 0$. Es decir, si recordamos la expresión (89) del producto escalar de dos vectores, concluimos del resultado (96) que los vectores de posición y velocidad son perpendiculares en todo instante en un movimiento circular, porque si los módulos de los vectores no se anulan, el producto (89) sólo se puede anular si cos $\alpha = 0$, es decir, si $\alpha = 90°$. Esto resulta también claro en la figura 38, porque las rectas tangentes a la trayectoria circular, que dan la dirección del vector velocidad, son perpendiculares a los radios correspondientes.

2.2.4. ¿Qué hemos aprendido?

La velocidad de una partícula es una magnitud vectorial:

- Es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo (definición).
- Expresa el espacio que recorre una partícula por unidad de tiempo (significado).
- Se mide en metros por segundo (unidades).
- Indica cuál es la dirección y el sentido del movimiento de la partícula en cada instante, a través de la recta tangente a la trayectoria en cada punto (significado geométrico).

La descripción completa de un movimiento no se puede hacer sólo en términos de posición y velocidad, debemos utilizar también el concepto de aceleración. Veámoslo.

2.3. La aceleración

Tenemos una idea intuitiva de la magnitud **aceleración**: un vehículo se acelera cuando su velocidad cambia con el tiempo.

Por ejemplo, cuando empezáis la marcha estando detenidos o vais en coche a una velocidad determinada y pisáis el acelerador, el vehículo aumenta de velocidad. También se acelera cuando os movéis a una velocidad determinada y pisáis el pedal del freno: la velocidad del vehículo se reduce, y puede llegar a detenerse si mantenéis el pie en el freno. En este último caso, la aceleración reduce la velocidad (también decimos que el vehículo se desacelera, o frena).

Por lo tanto, una aceleración implica un cambio de velocidad.

¿En qué intervalo de tiempo se está acelerando una partícula que tiene la velocidad representada en la figura 39?

Figura 39. Velocidad de una partícula en función del tiempo

La partícula se está acelerando en todos los intervalos de tiempo en los que v no sea constante. En los intervalos en los que la curva es paralela al eje t (A, C y E), la velocidad es constante; en todos los otros puntos la partícula está acelerada. Si la pendiente de la curva $v(t)$ es positiva, como en D, la partícula aumenta su velocidad, es decir, se acelera (aceleración positiva) y si la pendiente es negativa, como en B y F, la partícula se están frenando (aceleración negativa).

Actividad 2.9. Aceleraciones

En los movimientos representados en la figura 35 de la actividad 2.7 ¿hay algún instante o intervalo de tiempo en el que la partícula esté acelerada?

Solución

La velocidad varía en todo instante para cualquiera de los cinco movimientos de la figura 35 y, por lo tanto, la partícula siempre está acelerada.

En términos coloquiales denominamos aceleración al cambio de velocidad que se produce en una partícula que se mueve; por ejemplo, si viajamos a 50 km/h y pasamos a 60 km/h. Pero una aceleración también es un cambio en la dirección de movimiento. Muchos de los movimientos que observamos son movimientos acelerados (o han estado acelerados en algún momento, o lo estarán). Así, si un vehículo está parado y comienza a moverse de manera que su velocidad aumenta hasta llegar a una velocidad v, el vehículo se está acelerando durante todo este tiempo. Si el vehículo gira una esquina a una velocidad constante de 20 km/h, también está acelerado en todo momento, porque la dirección de la velocidad cambia constantemente. Si un vehículo deja de acelerarse, se mueve a velocidad constante y en línea recta.

Veamos otro ejemplo. La Tierra, en su movimiento alrededor del Sol, describe una trayectoria casi circular (ligeramente elíptica). ¿Está acelerada, la Tierra?

Actividad 2.10. Vector de posición, velocidad y aceleración

Representad el movimiento de la Tierra alrededor del Sol como una circunferencia, con el Sol en el centro, y representad en diversos instantes el movimiento de la Tierra mediante su vector de posición con respecto al Sol. Representad también el vector de velocidad de la Tierra en un punto de la trayectoria. ¿Está acelerada la Tierra en su movimiento?

Solución

La gráfica de la actividad 2.8 (figura 38) nos sirve. El vector velocidad y el vector de posición son perpendiculares en todo instante. Además, como el vector velocidad está cambiando de dirección en todo momento, el movimiento de la Tierra está acelerado continuamente.

En definitiva, se denomina **aceleración** al cambio en la velocidad de un objeto, bien sea en el módulo de la velocidad, bien en la dirección del movimiento, o bien en ambas magnitudes a la vez.

Ahora que hemos desarrollado cualitativamente el concepto de aceleración, debemos definirlo. Seguiremos el mismo proceso que en la definición de la velocidad y comenzaremos por la definición del valor medio de la aceleración en un intervalo de tiempo.

2.3.1. Aceleración media

Teniendo en cuenta todo lo que acabamos de decir sobre aceleraciones y de lo que sabemos sobre la lectura de cocientes, ¿cómo se lee la expresión siguiente?

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (97)$$

Si recordamos lo que dijimos al introducir la velocidad media en el subapartado 2.2.1, lo mismo se aplica a la aceleración media (ecuación (97)).

La aceleración media de un cuerpo que cambia su velocidad en un intervalo (o en un incremento) $\Delta\vec{v}$ durante un intervalo o incremento de tiempo Δt es igual al cociente entre el incremento de velocidad y el incremento de tiempo correspondiente. La aceleración media es el cambio de velocidad que ha experimentado el cuerpo por unidad de tiempo.

La aceleración mide el ritmo de cambio de la velocidad de un cuerpo. La velocidad mide el ritmo de cambio de la posición del cuerpo.

El ritmo de cambio de una magnitud es el cambio que se produce en esta magnitud por unidad de tiempo.

Analicemos la definición de aceleración media.

Actividad 2.11. Definición de $\langle\vec{a}\rangle$

Como ya hemos insistido en el apartado 1, es importante que aprendamos a definir correctamente las magnitudes. Por ejemplo, sería incorrecto decir, con respecto a la ecuación (97), que "la aceleración media $\langle\vec{a}\rangle$ de un cuerpo que cambia su velocidad en Δv durante un tiempo Δt es igual al cambio de velocidad que ha sufrido el cuerpo en este intervalo de tiempo."

a) Explicad por qué.
b) Explicad qué significado tiene el concepto de aceleración media.
c) ¿Cómo de pequeño debe ser el intervalo Δt para que la definición sea válida?

Solución

a) La definición es incorrecta, porque estaríamos diciendo que una aceleración es un cambio de velocidad. La aceleración es el cambio de velocidad por unidad de tiempo. No es lo mismo decir "en un intervalo de tiempo" que "por unidad de tiempo".

b) La aceleración media de una partícula en un intervalo de tiempo dado es el cambio constante de velocidad que tendría la partícula por unidad de tiempo si la velocidad cambiara al mismo ritmo durante todo el intervalo.

c) Cuando calculamos las medias temporales de una magnitud, sea la velocidad o la aceleración, el incremento de tiempo puede ser cualquiera, incluso muy grande o muy pequeño. No hay ninguna restricción. La aceleración media que calculemos en cada caso tendrá significado en el intervalo de tiempo en el que la hemos calculado.

Ahora ya estamos en condiciones de definir la magnitud aceleración instantánea.

2.3.2. Aceleración instantánea

Si una partícula se mueve con una velocidad $\vec{v}$ y esta velocidad varía con el tiempo según una función $\vec{v}(t)$, la aceleración instantánea de la partícula se define como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (98)$$

La aceleración es una magnitud vectorial, igual que lo es la velocidad.

Y de la misma manera que dijimos cuando introdujimos la velocidad instantánea en el subapartado 2.2.2, podemos decir cómo se **calcula** y qué **representa** la **aceleración instantánea**.

> La aceleración es una magnitud vectorial que se calcula como la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo. La aceleración representa el cambio de velocidad de la partícula que se produce por cada segundo.

La aceleración instantánea se obtiene mediante el paso al límite de un cociente incremental, que no es más que la aceleración media de la partícula en el intervalo Δt.

Si hacemos explícita la definición de derivada:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (99)$$

queda más claro que, para llegar a la definición de aceleración instantánea como cociente diferencial, hemos de pasar antes por el concepto de aceleración media como cociente de incrementos, de la misma manera que hicimos con la magnitud velocidad en el subapartado 2.2 (y de la misma manera que se puede hacer con cualquier magnitud que se define como un cociente y en forma diferencial).

Derivadas

La derivada de una función $y(x)$ con respecto a la variable x se escribe:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

y la derivada segunda se escribe:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Las mismas expresiones valen para funciones vectoriales.

Hemos comenzado el subapartado con una definición de aceleración en términos verbales y cualitativos (es decir, una definición que nos permite hablar y saber cuándo hay aceleración): "denominamos aceleración al cambio de velocidad que se produce en una partícula que se mueve".

Una definición operativa de aceleración (es decir, una definición que nos permita calcularla), se puede leer así: "la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo".

También podemos decir que el vector aceleración se obtiene derivando el vector velocidad con respecto al tiempo, ecuación (98): puesto que, según la ecuación (75), la velocidad es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (100)$$

entonces si derivamos esta expresión, vemos que la aceleración de una partícula también es la derivada segunda del vector de posición con respecto al tiempo dos veces:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (101)$$

Como acabamos de comentar, las magnitudes que conviene definir en ciencias o en tecnología siempre tienen definiciones cualitativas y cuantitativas (u operativas). Otra cuestión, que no vamos a discutir aquí, es como podríamos "determinar" o "medir" experimentalmente magnitudes como la aceleración. Y, finalmente, hemos de tener presentes siempre las unidades en las que se mide la magnitud física correspondiente. En el caso de la aceleración, a partir de la expresión (98) vemos que:

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} \tag{102}$$

en que hemos representado entre paréntesis las magnitudes, para indicar que sólo queremos saber las unidades en las que se miden. Como las velocidades se miden en m/s, obtenemos:

$$[a] = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{103}$$

En la expresión (102) hemos tenido en cuenta que el incremento de una magnitud tiene las mismas dimensiones que la magnitud, porque un incremento es una resta de dos valores de la misma magnitud.

Ved la ecuación 61 y el recuadro en el que se encuentra para recordar lo que significa *incremento*.

En el Sistema Internacional de unidades, la aceleración es una magnitud derivada, igual que la velocidad, y se define en términos de las magnitudes fundamentales longitud y tiempo. La unidad del SI para la aceleración es (m/s)/s o m/s^2 y se lee, respectivamente, metros por segundo para cada segundo o metros por segundo al cuadrado. Hablamos, por ejemplo, de una aceleración de 3 m/s^2, que leemos así: "una aceleración de 3 metros por segundo para cada segundo" (de manera que recordamos el origen de esta magnitud como cociente de una velocidad y de un tiempo), o bien "una aceleración de 3 metros por segundo al cuadrado", de manera que simplemente leemos la expresión m/s^2. Sin embargo, el lenguaje verbal, presenta ambigüedades que no tiene el lenguaje matemático.

Ambigüedades del lenguaje

Si decimos "3 por 4", sabemos que nos referimos a la operación de multiplicar, "3 × 4". Pero no olvidemos que la preposición "por" tiene el significado de división cuando leemos m/s^2, metros *por* segundo al cuadrado. En otros contextos puede tener el significado de multiplicación, como en "*a* por *t* da *v*" (simbólicamente, $v = a \cdot t$). Para evitar confusiones se suele utilizar "por" cuando hablamos de unidades, como en los metros por segundo (m/s) o en los newtons por gramo (N/g). Pero no se menciona la operación de multiplicar cuando se trata de unidades que se multiplican: newton metro (N · m), kilogramo segundo (kg · s), etc.

2.3.3. Vector aceleración

A partir de la definición (98) o (101), las tres componentes cartesianas del vector aceleración,

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{104}$$

son, explícitamente:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{105}$$

Veamos cómo determinamos la aceleración en un tipo de movimiento importante, el de rotación.

Actividad 2.12. Aceleración en una rotación uniforme

En el caso de un movimiento circular, el vector de posición de la partícula con respecto al centro de la trayectoria y el vector velocidad son perpendiculares en todo punto y, por eso, el producto escalar del vector de posición de la partícula y del vector velocidad se anula, como hemos visto en la actividad 2.8.

¿Qué obtenemos si volvemos a derivar la expresión $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$? (Suponed que el módulo de la velocidad es constante, es decir, la partícula recorre el mismo número de metros cada segundo en todo instante.)

Solución

Para un movimiento circular, el producto escalar del radio vector y de la velocidad en todo instante es nulo, ecuación (96):

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \tag{106}$$

Si derivamos con respecto al tiempo esta expresión, obtenemos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{r}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \tag{107}$$

Y si reconocemos las expresiones de la velocidad y de la aceleración en la expresión anterior podremos escribir:

$$\vec{v}^2 + \vec{r} \cdot \vec{a} = 0 \tag{108}$$

Por lo tanto, como $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ es una magnitud escalar, hemos deducido que:

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = -v^2 \tag{109}$$

y si escribimos explícitamente la expresión del producto escalar:

$$|\vec{r}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\theta = -v^2 \tag{110}$$

Como los módulos de los vectores que aparecen en la ecuación anterior y el cuadrado de la velocidad son positivos, concluimos que $\cos\theta = -1$, y el ángulo que forman los vectores de posición y de aceleración es de 180° o π radianes: $\vec{r}$ y $\vec{a}$ son antiparalelos en todos los puntos de la trayectoria.

En un movimiento circular, el vector de posición y el vector velocidad son perpendiculares (figura 40a) y, por lo tanto, también son perpendiculares los vectores velocidad y aceleración (figura 40b). La aceleración es, por lo tanto, centrípeta: dirigida hacia el centro de la circunferencia y de sentido contrario al vector de posición.

Radio vector

Radio vector es el nombre que recibe el vector de posición en un movimiento circular.

Figura 40. Movimiento de rotación a velocidad constante

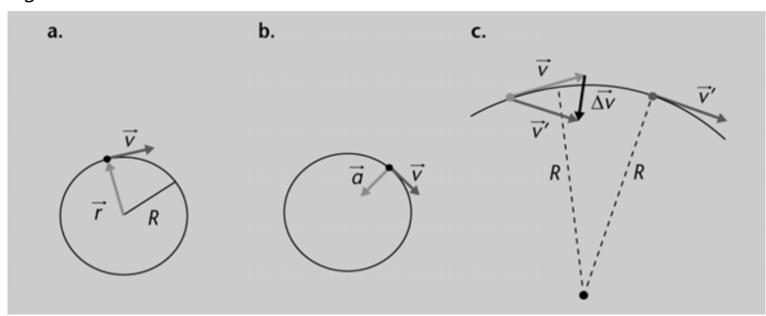


Figura 40

a. Vector de posición y velocidad.

b. Velocidad y aceleración.

c. Incremento de velocidad para un incremento de tiempo pequeño.

Se habla de **aceleración centrípeta**, pues, cuando en un movimiento de rotación, la partícula está continuamente sometida a una aceleración dirigida hacia el centro de la trayectoria. Su valor, en módulo, es:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \qquad (111)$$

Este resultado conviene que lo recordéis: se obtiene a partir de la ecuación (110) si hacemos $\theta = \pi$ y denominamos a_c al módulo de la aceleración, $a_c = |\vec{a}| = a$ y $R = |\vec{r}| = r$.

La figura 40c muestra la velocidad $\vec{v}$ en un instante y la velocidad $\vec{v}\,'$ en un instante posterior. Se puede ver que la aceleración es centrípeta porque el cambio del vector velocidad entre dos puntos de la trayectoria, $\Delta\vec{v}$, para un incremento de tiempo que tiende a cero, tiene dirección radial y dirigida al centro; y al dividir el cambio de velocidad por el incremento infinitesimal de tiempo obtenemos el vector aceleración, que también estará dirigido hacia el centro.

En un movimiento circular, el módulo de la aceleración dirigida hacia el centro de la trayectoria es la aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

El cálculo analítico de una aceleración a partir de la posición o de la velocidad del objeto se reduce a hacer la derivada correspondiente con respecto al tiempo. Hagamos un ejercicio.

Actividad 2.13. Aceleraciones

Calculad la aceleración para los movimientos que se han discutido en las actividades 2.5 y 2.6.

Solución

En la actividad 2.5 hemos visto que la velocidad del cuerpo varía linealmente con el tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 12t \qquad (112)$$

y, por lo tanto, la aceleración de la partícula es constante:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad (113)$$

Fijaos en que en la expresión de la velocidad, $v = 12 \cdot t$, no es necesario especificar en qué unidades medimos el factor 12 que multiplica al tiempo, siempre que sepamos en qué unidades se miden v y t; por el contrario, en el caso de escribir $a = 12$, sí que conviene especificar las unidades correspondientes, tal como hemos hecho.

En la actividad 2.6 hemos obtenido que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8t, -1, 15\cos(5t)) = 8t\,\vec{i} - \vec{j} + 15\cos(5t)\vec{k} \qquad (114)$$

y, por lo tanto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (8, 0, -75\text{sen}(5t)) = 8\vec{i} - 75\text{sen}(5t)\vec{k} \qquad (115)$$

En este caso, sólo la tercera componente de la aceleración es función del tiempo.

2.3.4. ¿Qué hemos aprendido?

Nos hemos hecho una idea cualitativa y hemos aprendido a calcular cuantitativamente la magnitud vectorial que denominamos aceleración, tanto el valor medio como el instantáneo.

A medida que avanzamos en el estudio de la cinemática podemos analizar situaciones cada vez más complejas, y con la ayuda de las magnitudes que vamos introduciendo, podemos abordar también la resolución de problemas cuantitativos, no sólo cualitativos. Veremos algún ejemplo en el apartado siguiente, en que seremos capaces de encontrar las leyes del movimiento de algunas partículas en situaciones concretas.

2.4. Deducción de las ecuaciones de movimiento

Una ley del movimiento o una ecuación del movimiento nos indica qué posición ocupa en cada instante el objeto que se desplaza. La caracterización total de un movimiento en términos cinemáticos requiere conocer las tres funciones posición, velocidad y aceleración, $\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$. Pero sólo necesitamos conocer una de estas funciones para tener determinadas las otras dos, porque las tres están relacionadas. Veámoslo. Como la discusión es parecida si tratamos movimientos en una, dos o tres dimensiones, bastará con centrarnos en el caso más sencillo del movimiento unidimensional.

Para un movimiento en una dimensión a lo largo de una recta (el eje X, por ejemplo) necesitaríamos conocer la función $x(t)$ para tener totalmente determinado el movimiento, porque la velocidad y la aceleración en todo instante se obtienen por derivación de esta función, ecuaciones (77) i (105):

$$v_x = \frac{dx}{dt} \tag{116}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{117}$$

Pero ¿qué ocurre si conocemos, por ejemplo, únicamente la función velocidad $v_x(t)$? Entonces podremos determinar fácilmente la aceleración por derivación, como en la expresión (117) anterior.

Y ¿cuál es la función $x(t)$ que corresponde a una velocidad $v_x(t)$ dada? La relación entre ambas magnitudes es la ecuación (116). Una ecuación como la (116), en la cual la incógnita, x, está dentro del signo de derivación, se denomina *ecuación diferencial*. Para obtener la posición $x(t)$ se puede comenzar escribiendo la ecuación (116) en términos de diferenciales, despejando el diferencial de la posición, dx:

$$dx = v_x dt \tag{118}$$

Vectores que dependen del tiempo

Con la notación $\vec{r}(t)$ para el vector de posición estamos dando tres funciones del tiempo,

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

Vectorialmente,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

y análogamente para los vectores velocidad y aceleración.

Constante, uniforme, estático

Constante: que no varía. Puede ser constante en el tiempo, con respecto a la posición, etc.

Uniforme: que tiene el mismo valor en todos los puntos del espacio.

Estacionario: que no depende del tiempo. Puede ser estacionario pero no uniforme, es decir, tener valores diferentes en puntos diferentes del espacio.

e integrar ambos miembros de la igualdad (recordemos que la integración es la operación inversa de la derivación) para obtener la posición a partir de la velocidad.

La posición se calcula a partir de la velocidad con la expresión siguiente:

$$x = \int v_x dt + \text{constante} \quad (119)$$

Esta expresión se lee así: "la posición de una partícula se obtiene mediante la integral con respecto al tiempo de la velocidad de la partícula".

La constante indeterminada que aparece cuando calculamos una integral indefinida se puede determinar si conocemos el valor de la posición en algún instante concreto de tiempo. En el subapartado 1.5.2 ya dijimos que en todo problema de cinemática necesitamos conocer las condiciones iniciales del problema, es decir, el estado del movimiento en un instante determinado, que es el instante inicial.

Por lo tanto, para conocer la posición de una partícula en todo momento sólo tenemos que integrar la expresión (119) para un movimiento unidimensional en el que se conozca la velocidad. A continuación veremos el caso más sencillo que se puede presentar, el de una partícula que se mueve a velocidad constante.

2.4.1. Velocidad constante

El caso más sencillo de movimiento es cuando un cuerpo se mueve de manera que el vector velocidad sea constante, $\vec{v} = \text{constante}$. Se trata de un movimiento rectilíneo y uniforme. Entonces, si escogemos el eje X en la dirección del movimiento, podemos escribir la velocidad así, $\vec{v} = (v, 0, 0)$, es decir:

$$v_x = v \quad (120)$$

donde v es constante. En este caso la integral (119) es inmediata, porque la velocidad constante puede salir de la integral:

$$x = v\int dt + constante \quad (121)$$

y las operaciones de diferenciación e integración son inversas:

$$\int dt = t \quad (122)$$

La ecuación de movimiento que se obtiene de la ecuación (119) es, pues:

$$x = vt + constante \quad (123)$$

Si la posición de la partícula es x_0 para $t = 0$ (la posición inicial), tenemos:

$$x(t = 0) = x_0 \quad (124)$$

Y a partir de la ecuación (123) vemos que la constante tiene que ser el valor x_0, y la ley que da el espacio que recorre el objeto en un tiempo determinado es:

$$x = x_0 + vt \quad (125)$$

Como ya sabemos desde el apartado 1, a un movimiento a velocidad constante le corresponde un desplazamiento que aumenta linealmente con el tiempo y, por lo tanto, la gráfica correspondiente es una recta en el plano $x(t)$. Si el vehículo sale del origen, entonces $x = v \cdot t$; el espacio que recorre coincide con la posición que ocupa en cada instante y es el producto de la velocidad por el tiempo.

Veamos ahora un caso un poco más complejo de determinación de la ley del movimiento.

2.4.2. Aceleración constante

Hagamos ahora la deducción de las ecuaciones de movimiento en otro caso. Teníamos pendiente desde el subapartado 1.2 la deducción de la ecuación que da el tiempo necesario para que un objeto (un billete, en aquel caso) caiga desde una altura determinada cuando lo soltamos. La aceleración de caída del billete es constante, y la denominamos *aceleración de la gravedad*. Por lo tanto, estudiaremos el caso particular, pero frecuente, de una partícula que se mueve en una dimensión de manera que está sometida a una aceleración constante, a.

Billete en caída libre

Tenéis que tener cuidado con el experimento del billete. Si lo intentáis, el billete, al caer, hará muchas eses y llegará enseguida a una cierta velocidad límite. Esto sucede porque el billete tiene muy poca masa y presenta mucha superficie en contacto con el aire, de manera que se ve muy afectado por el rozamiento. Para ignorar estos efectos, que ahora no nos interesan, podéis imaginar que el billete es una lámina de metal o bien que hacemos el experimento sin aire.

Si la partícula parte del reposo, ¿cuál será la ecuación de la trayectoria de esta partícula? Es decir, ¿qué función da la posición de la partícula en función del tiempo y también la velocidad de la partícula en función del tiempo?

El problema físico ya lo hemos enunciado, y el resto es "sólo" un problema matemático. Para encontrar la ecuación de movimiento debemos resolver la ecuación siguiente:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (126)$$

en que la aceleración a es una constante que se supone conocida. Se trata de resolver la ecuación diferencial (126), en la que la incógnita es la función v que aparece dentro del signo de derivación. Ya nos hemos encontrado antes con un problema parecido, cuando pasamos de la ecuación (116) a la (118).

La ecuación diferencial (126) tiene una solución sencilla, ya que estamos buscando una función $v(t)$ que tenga una derivada constante, y esto sólo ocurre para la función lineal. Asimismo, calculamos la solución de la ecuación diferencial paso a paso, como si se tratase de una función $a = a(t)$ cualquiera. Primero escribimos la ecuación diferencial así:

$$dv = a \cdot dt \quad (127)$$

e integramos ambos miembros:

$$\int dv = \int a \cdot dt \quad (128)$$

Por lo tanto, si conocemos la función $a(t)$, la velocidad instantánea $v(t)$ viene dada por:

$$v = \int a \cdot dt + constante \quad (129)$$

Es decir, como nos enseñan en el curso de matemáticas, necesitamos encontrar la función primitiva de a, y el resultado siempre está afectado de una constante que, como hemos visto en el caso de la velocidad, ecuación (123), estará determinada por la situación física concreta que estemos resolviendo en cada caso.

En el caso sencillo de que la aceleración a sea constante, a puede salir de la integral en la ecuación (129) y, así:

$$v = a\int dt + constante \quad (130)$$

Como la integración y la derivación son operaciones inversas, ecuación (122), escribiremos:

$$v = a \cdot t + constante \quad (131)$$

Como hemos dicho, la constante indeterminada que aparece al calcular una integral indefinida puede determinarse por consideraciones sobre el problema físico que estamos resolviendo. Necesitamos conocer las condiciones iniciales del movimiento para determinarlo totalmente. En el problema de caída de un billete, la partícula parte del reposo y se acelera; la velocidad en el instante $t = 0$ (que podemos tomar como instante inicial) será, por lo tanto, nula. Entonces, la ecuación (131) debe dar $v = 0$ para $t = 0$. Esta condición, $v(t = 0) = 0$, determina la constante en la ecuación (131), que en este caso será nula:

$$v(t = 0) = 0 = a \cdot 0 + constante \Rightarrow constante = 0 \quad (132)$$

Por lo tanto, para un cuerpo que se acelera con aceleración constante y parte del reposo, la velocidad en el instante t es:

$$v = a \cdot t \quad (133)$$

es decir, parte del reposo y se acelera linealmente en el tiempo.

A alguno de vosotros os puede parecer que andamos matando moscas a cañonazos, al resolver este problema tan sencillo con tanto detalle. Pero el procedimiento y la argumentación utilizados en este tipo de problemas siempre son parecidos, y la única dificultad con la que nos podemos encontrar es al hacer la integral correspondiente, $\int a\,dt$.

¿En qué cambia el problema si la caída no es libre? Si lanzamos un objeto hacia el suelo con una determinada velocidad inicial v_0, el cálculo de la velocidad $v(t)$ es idéntico al anterior; partiendo del paso (132), haremos:

$$v(t=0) = v_0 = a \cdot 0 + constante \Rightarrow constante = v_0 \quad (134)$$

y, por lo tanto, la velocidad también varía linealmente con el tiempo, pero ahora tenemos un término independiente en la expresión de la recta $v(t)$:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad (135)$$

en lugar del resultado (133). Ya no hay proporcionalidad entre t y v.

Con tal de determinar totalmente el movimiento necesitamos calcular la posición de la partícula en todo instante, en el caso de un movimiento con aceleración constante. Veámoslo.

2.4.3. Espacio recorrido en un movimiento acelerado

El movimiento de la partícula que se acelera desde el reposo queda totalmente caracterizado cuando, además de la velocidad, conocemos también la posición en cada instante. El proceso que debemos seguir es parecido al del subapartado anterior, pero ahora conocemos la función $v(t) = a \cdot t$, ecuación (133), si suponemos que el movimiento comienza desde el reposo.

Para un movimiento $z(t)$ a lo largo de la línea definida por el eje Z, por ejemplo, la velocidad se define así:

$$v = \frac{dz}{dt} \quad (136)$$

En la expresión anterior, que es la definición general de la componente z del vector velocidad, conocemos el término de la izquierda, la velocidad (133),

pero no la función $z(t)$. La expresión anterior es, por lo tanto, otra ecuación diferencial, que vamos a escribir así (dejando a la izquierda la parte que no conocemos):

$$\frac{dz}{dt} = a \cdot t \tag{137}$$

Para obtener la ecuación de la trayectoria, $z(t)$, pasamos la diferencial dt al miembro de la derecha, como en las ecuaciones (118) y (127):

$$dz = a \cdot t \cdot dt \tag{138}$$

y, al integrar, obtenemos la función del espacio recorrido:

$$z = \int a \cdot t \cdot dt + C \tag{139}$$

donde C es otra constante indeterminada. En el caso particular de que la aceleración sea constante podemos sacarla de la integral y la integral resultante es inmediata:

$$z = a\int t \cdot dt + C = \frac{1}{2}at^2 + C \tag{140}$$

La constante C se determina según el problema que tratemos. Por ejemplo, si la partícula está en el punto $z = z_0$ en el instante $t = 0$, es decir, $z(t = 0) = z_0$, obtendremos el siguiente resultado al sustituir estos valores en la expresión (140):

$$z(t = 0) = z_0 = 0 + C \tag{141}$$

Valores iniciales

$z(0)$ es la posición de la partícula en el instante $t = 0$,

$z(t = 0) = z_0$

Análogamente podemos definir la velocidad inicial,

$v(t = 0) = v_0$

y, por lo tanto, $C = z_0$. Escribiremos, por fin, de las expresiones (140) y (141):

$$z = \frac{1}{2}at^2 + z_0 \tag{142}$$

Las ecuaciones (142) y (133) dan la posición y la velocidad, respectivamente, para un objeto que se mueve con aceleración constante, y pueden servir para resolver un gran número de problemas. Veamos algunos ejemplos.

Actividad 2.14. Representación gráfica de magnitudes relacionadas con el movimiento

Tomemos un eje de coordenadas z vertical y cuyo sentido positivo es hacia arriba.

Representad gráficamente las funciones $z(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ para el movimiento de un objeto que parte del reposo con aceleración constante a y dirigida en el sentido de z creciente. Haced también el caso en el que la aceleración vaya en el sentido de las z decrecientes, y sea igual en módulo a la de la gravedad, $a = g$.

Solución

Las expresiones (142), (133) y a = constante son, gráficamente, las de la figura 41.

Figura 41

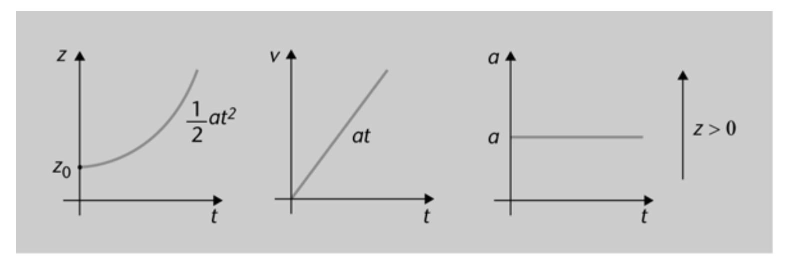


Figura 41

Eje z de coordenadas y movimiento con aceleración constante y dirigida en el sentido positivo del eje z:
a. posición,
b. velocidad y
c. aceleración.

La posición instantánea de la partícula que se mueve con aceleración constante y parte del reposo es, gráficamente, una parábola (figura 41a), una dependencia cuadrática $z(t)$ en la que z crece muy rápidamente al crecer el tiempo (ecuación 142). La segunda representación (figura 41b), la de la velocidad instantánea de la partícula, es una recta de pendiente a (ecuación 132). La tercera gráfica (figura 41c), representa la aceleración, y es una recta horizontal, un valor constante para todo t.

Cuando la aceleración tiene el sentido negativo del eje Z, la parábola es decreciente (figura 42a), porque la expresión (142) es ahora:

$$z = z_0 - \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (143)$$

Por otra parte, la recta $v(t)$ de la ecuación (133) tiene ahora pendiente negativa (figura 42b):

$$v = -a \cdot t \qquad (144)$$

y la aceleración es una constante negativa (figura 42c).

Figura 42

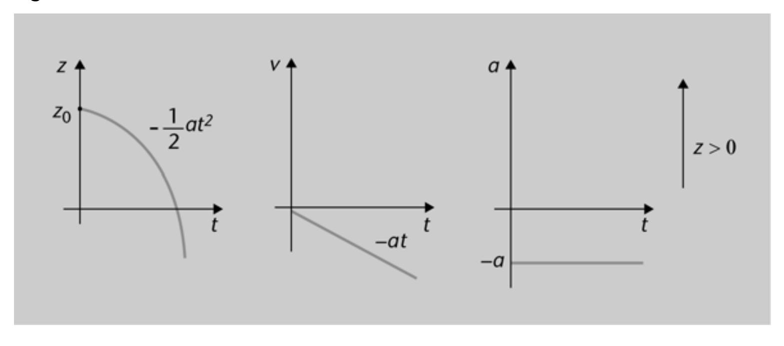


Figura 42

Eje z de coordenadas y:
a. posición,
b. velocidad y
c. aceleración para un movimiento con aceleración constante y dirigida en el sentido negativo del eje z.

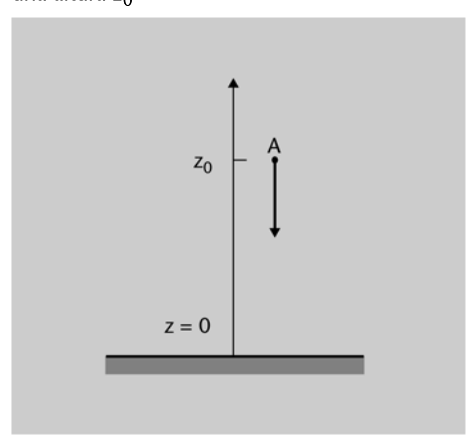
La representación gráfica que hemos visto en la actividad anterior puede facilitar la discusión del problema siguiente de caída libre.

2.4.4. Caída libre: leyes del movimiento

Un caso particular importante de los movimientos uniformemente acelerados (o movimientos que tienen una aceleración constante) es el de los objetos que se dejan caer o que se lanzan en cualquier dirección y caen al suelo. Como sabemos, la Tierra atrae todos los objetos hacia ella en un movimiento de caída que es uniformemente acelerado; la aceleración que tiene un objeto que cae libremente al suelo es:

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \qquad (145)$$

Figura 43. Un objeto A cae al suelo ($z = 0$) desde una altura z_0



Las ecuaciones de movimiento de una partícula que cae al suelo libremente desde una altura determinada y sin velocidad inicial son las ecuaciones (143) o (144). Vemos en las expresiones (142) o (143) que las distancias que recorre el objeto en caída libre son proporcionales al cuadrado del tiempo que transcurre; con $\Delta z = z - z_0$ podemos escribir esta proporcionalidad así:

$$\Delta z = \frac{1}{2}at^2 \tag{146}$$

es decir:

$$\Delta z \propto t^2 \tag{147}$$

Se puede ver gráficamente este resultado en las figuras 41 y 42.

Ahora ya podemos volver al experimento del billete que cae, del apartado 1.

Actividad 2.15. Relacionamos situaciones

a) Haced la correspondencia entre los resultados anteriores para un cuerpo en caída libre y el problema del billete que cae (subapartado 1.2).

b) Calculad también la velocidad con la que cae al suelo un objeto desde una altura L.

Solución

El tiempo que tarda en caer una partícula desde la altura $z_0 = L$ hasta el suelo ($z = 0$) es, según la expresión (143), con $a = g$, el siguiente:

$$0 = L - \frac{1}{2}gt^2 \tag{148}$$

y despejamos el tiempo:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} \tag{149}$$

Hemos deducido, por lo tanto, la expresión (1) del apartado 1: el tiempo que da la ecuación (149) es el que tarda el punto superior de un billete de longitud L en tocar el suelo. En otras palabras, es el tiempo que tarda en pasar verticalmente todo el billete por un punto del espacio en caída libre. La expresión (149) se ha obtenido a partir del cálculo de la trayectoria de una partícula que se mueve con aceleración constante.

De la misma manera que hemos deducido la expresión del tiempo de caída libre de un objeto cualquiera, podemos deducir la velocidad con la que llegaría el objeto al suelo. Si en la expresión (144), con $a = g$, $v = -gt$, sustituimos el tiempo de caída libre, ecuación (149), obtenemos:

$$v = -g \cdot \sqrt{\frac{2L}{g}} = -\sqrt{2gL} \qquad (150)$$

La velocidad de caída depende de la raíz cuadrada de la altura inicial del objeto. El signo negativo indica que es una velocidad que tiene el sentido negativo del eje Z, es decir, una velocidad decreciente.

Recordad

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

En la expresión (150) no aparece la masa del objeto que cae. Por lo tanto, todos los objetos que caen desde una altura L bajo la acción únicamente de la gravedad terrestre, llegan al suelo con la misma velocidad en módulo, $\sqrt{2gL}$. Por ejemplo, un objeto que cae de una altura de 10 m llega al suelo a una velocidad aproximada de 14 m/s.

2.4.5. Otros ejemplos de movimientos

Para terminar el apartado haremos un par de actividades en las que analizaremos un ejemplo de movimiento utilizando los lenguajes gráfico, verbal y algebraico.

Actividad 2.16. Gráficas de velocidad y aceleración

Un vehículo se mueve sobre una recta. Desde el instante $t = 0$ hasta el instante t_1 el vehículo tiene una velocidad constante v_1, y en este instante comienza a acelerarse con una aceleración constante negativa.

a) ¿Qué función nos dará la velocidad del móvil en cada instante posterior a t_1? Haced una gráfica cualitativa de la función y calculad también su expresión matemática.

b) Explicad el movimiento que resulta hasta que el vehículo se detiene.

c) Si la aceleración negativa la provoca el freno del vehículo, o si la provoca una ráfaga de viento contraria al movimiento, ¿qué diferencia hay en el movimiento resultante?

Solución

a) La función $v(t)$ se halla definida en dos intervalos de tiempo; el primero va desde el instante inicial hasta el instante t_1:

$$v = v_1,\ 0 < t < t_1 \qquad (151)$$

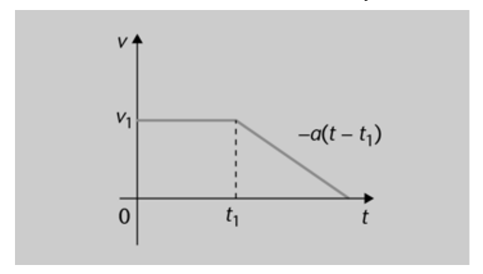
y el segundo intervalo es para tiempos superiores a t_1:

$$v = v_1 - a(t - t_1),\ t > t_1 \qquad (152)$$

La expresión para $t > t_1$ la obtenemos de la expresión (131); la constante se obtiene al imponer la condición $v(t_1) = v_1$ al resultado de la integración.

En la figura 44 se representa la función $v(t)$, ecuaciones (151) y (152).

Figura 44. Movimiento descrito en el enunciado de la actividad 2.16, ecuaciones 151 y 152



b) El movimiento descrito es el de una partícula que va a velocidad constante y en el instante t_1 comienza a reducir la velocidad de manera que en intervalos iguales de tiempo reduce la velocidad en la misma cantidad (aceleración constante), hasta que se detiene.

c) En el caso del freno, el vehículo acaba deteniéndose, como hemos comentado, y se muestra en la figura 44.

Pero si es el viento quien frena el vehículo, éste no se detendrá cuando la velocidad se reduzca a cero, sino que continuará moviéndose en un sentido contrario al inicial, con velocidad negativa. La expresión (152) dice que $v < 0$ para $a(t - t_1) > v_1$. Gráficamente, la recta de la figura 44 continuará para valores negativos de v.

Y ahora calcularemos la ecuación de movimiento de la partícula de la actividad anterior.

Actividad 2.17. Posición en función del tiempo

Calculad la función $x(t)$ para el movimiento descrito en la actividad 2.16. Haced el cálculo de manera analítica (a partir de las fórmulas correspondientes) y gráfica (a partir de la figura 44).

Solución

Como la función velocidad está definida en dos intervalos, conviene calcular el espacio recorrido en cada uno de ellos por separado. Además, haremos el cálculo tanto por vía geométrica como analítica, para ver dos maneras de abordar el problema.

Para la gráfica de la figura 44 tenemos un movimiento de velocidad constante v_1 desde el instante 0 al t_1. Por lo tanto, el espacio recorrido es:

$$x = v_1 \cdot t_1 \qquad (153)$$

Este resultado se obtiene de forma analítica si recordamos (subapartado 2.4.1) que para un movimiento uniforme (a velocidad constante) la distancia recorrida es el producto de la velocidad por el tiempo.

Otra manera de llegar al mismo resultado, pero gráficamente, es si recordamos el concepto geométrico de la operación de integrar: una integración es la operación inversa de una derivación, es decir, se trata de encontrar la función primitiva del integrando. En el caso del cálculo de la distancia recorrida a partir de la velocidad, $v = dx/dt$, el integrando es la función velocidad, ecuación (119):

$$x = \int v \cdot dt + \text{constante} \qquad (154)$$

El espacio recorrido es la integral de la velocidad.

La integral definida de la función velocidad entre dos instantes de tiempo:

$$x = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \qquad (155)$$

da el espacio recorrido por una partícula entre estos dos intervalos de tiempo.

Geométricamente, el cálculo (155) equivale a encontrar el valor del área sostenida entre la curva $v(t)$ y el eje X, entre las ordenadas correspondientes a los dos instantes de tiempo t_1 y t_2 (figura 45).

Figura 45

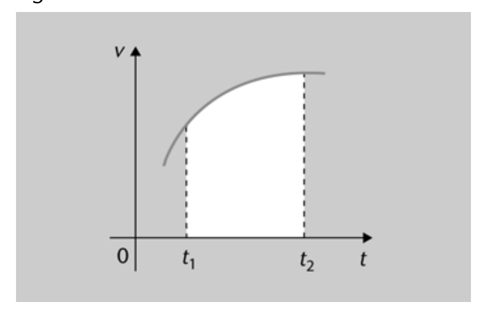


Figura 45

La integral definida de una función cualquiera $v(t)$ entre t_1 y t_2 da el área bajo la curva. El área marcada en blanco es el espacio que recorre la partícula entre t_1 y t_2.

En el caso de la figura 46 (que es la situación de la figura 44), el espacio que recorre la partícula entre $t = 0$ y $t = t_1$ es el área de un rectángulo de base t_1 y de altura v_1. Reencontramos así la expresión (153).

Ahora debemos calcular el espacio que recorre la partícula a partir del instante t_1. A partir de t_1 el movimiento es uniformemente acelerado (con aceleración negativa), hasta que la velocidad se anula. La velocidad instantánea, según la actividad 2.16, ecuación (152), es:

$$v(t) = v_1 - a(t - t_1) \text{ para } t > t_1 \tag{156}$$

Para poder calcular analíticamente el espacio recorrido en esta parte del movimiento debemos ver en qué instante t_2 se anula la velocidad. Hacemos $v(t_2) = 0$ y obtenemos:

$$v(t_2) = v_1 - a(t_2 - t_1) = 0 \tag{157}$$

Es decir, la partícula se detiene en el instante de tiempo dado por:

$$t_2 = t_1 + \frac{v_1}{a} \tag{158}$$

Gráficamente, el espacio total recorrido por la partícula es el área del triángulo rectángulo indicado en la figura 46, que sumada a la del rectángulo, da el espacio total que recorre la partícula.

Figura 46

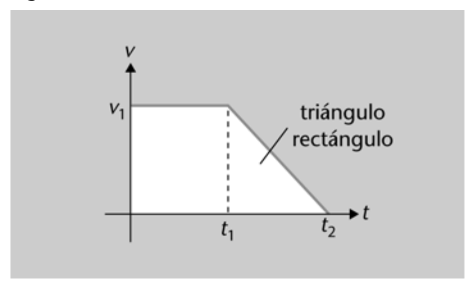


Figura 46

El área marcada en blanco es el espacio que recorre la partícula desde que inicia el movimiento hasta que se detiene en el instante t_2.

Entre t_1 y t_2 la velocidad decrece linealmente con el tiempo y el espacio recorrido en este intervalo de tiempo se puede calcular como el área del triángulo de la figura 46, *área* = ½ *base* × *altura*. Si tenemos en cuenta que la base del triángulo es el intervalo de tiempo en el que la velocidad se reduce a cero y la altura del triángulo es la velocidad inicial, obtenemos el área total cuando sumamos la del rectángulo, $v_1 t_1$, y tenemos en cuenta la expresión (158):

$$t_1 v_1 + \tfrac{1}{2}(t_2 - t_1) v_1 = t_1 v_1 + \frac{v_1^2}{2a} \tag{159}$$

en la que hemos utilizado 158.

Alternativamente, se puede llegar al mismo resultado por integración de la función velocidad, ecuación (156), entre los instantes t_1 y t_2:

$$espacio = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[v_1 - a(t - t_1) \right] \cdot dt \tag{160}$$

La integral es inmediata, y si hacemos las sustituciones correspondientes, obtenemos:

$$espacio = \left[(v_1 + a t_1) t \right] - a \left. \frac{t^2}{2} \right|_{t_1}^{t_2} = (v_1 + a t_1)(t_2 - t_1) - a\frac{t_2^2}{2} + a\frac{t_1^2}{2} \tag{161}$$

que coincide con la expresión (159) si utilizamos $t_2 - t_1 = v_1/a$ (ecuación 158).

El espacio total recorrido por el vehículo sería, entonces, la suma del espacio que recorre a velocidad constante y el que recorre con un movimiento acelerado:

$$x = v_1 t_1 + \frac{v_1^2}{2a} = v_1 (t_1 + \frac{v_1}{2a}) \tag{162}$$

En este ejemplo hemos comprobado que a veces los cálculos gráficos son más simples que los analíticos.

Como hemos visto, a veces conviene separar un movimiento en diferentes partes para poder analizarlo con mayor facilidad. En el caso de la figura 46, lo separamos en los intervalos $0 - t_1$ y $t_1 - t_2$. Por otro lado, a veces no se puede hacer el cálculo de una integral definida de manera analítica, como en la actividad anterior, pero siempre se puede estimar su valor si determinamos el área sostenida bajo la curva.

Recordad

Una integral definida equivale al área bajo la curva de la función integrada.

2.4.6. ¿Qué hemos aprendido?

- Hemos deducido leyes del movimiento para partículas a partir del conocimiento de la aceleración o de la velocidad a la que se mueven.
- Hemos visto que el cálculo implica hacer derivaciones o integraciones y aplicar las condiciones iniciales del problema.

2.5. Recapitulación

Hemos introducido el concepto de modelo y el concepto de partícula.

Como hemos visto en este apartado, los conceptos se definen en un proceso gradual. Tomemos el ejemplo del concepto de velocidad (aunque lo que vamos a decir es aplicable a todos los conceptos físicos): habitualmente comenzamos con una definición inicial poco elaborada, tentativa, cualitativa, que se va refinando a medida que aprendemos a aplicar el concepto en contextos cada vez más complejos. Finalmente, damos una definición precisa de la magnitud.

Por lo tanto, acerca de las magnitudes físicas debemos tener:

a) una idea cualitativa o descriptiva;
b) una expresión verbal precisa de su definición;
c) una definición operativa en forma algebraica;
d) Las unidades correspondientes;
e) alguna manera de medirlas.

Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones que describen el movimiento de una partícula en términos de posición, velocidad o aceleración, $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$. A partir de las expresiones que definen los vectores velocidad y aceleración podemos deducir las leyes del movimiento para una partícula cualquiera si conocemos su trayectoria, $\vec{r}(t)$, su velocidad, $\vec{v}(t)$, o su aceleración, $\vec{a}(t)$.

Como veremos en los próximos dos temas, la dinámica es la parte de la mecánica que nos enseña a calcular la aceleración $a(t)$ a partir de las fuerzas que actúan sobre el sistema. Una vez conocida la aceleración, podemos utilizar los métodos que hemos visto en este apartado para obtener las ecuaciones del movimiento. La deducción de las ecuaciones de movimiento de una partícula

a partir de la aceleración que tiene es un problema de integración; la deducción de la velocidad y la aceleración que tiene una partícula en movimiento a partir de la función que da su posición en cada instante, es un problema de derivación.

Hemos estudiado un caso especialmente importante, el movimiento uniformemente acelerado y, en particular, el movimiento en caída libre.

Podemos decir también, como conclusión, que llegar a entender los conceptos que hemos estado introduciendo (y los que se introducen en ciencia, en general) es un proceso lento y difícil, y por esto es necesario volverlos a ver en diversas circunstancias y desde puntos de vista diferentes. Sólo de esta manera se llegarán a "entender", es decir, llegaremos a apropiarnos de su significado y sabremos utilizar estos conceptos para hacer uso de ellos en la resolución de problemas.

2.6. Problemas de ampliación

Problema 2.1. Velocidades típicas

Es útil tener idea de algunas velocidades típicas.

a) Un vehículo se desplaza a una velocidad de 72 km/h; expresadla en m/s. (El resultado de este cálculo permite hacer cálculos mentales de velocidades típicas de la vida diaria, y comparar velocidades de diferentes objetos.)

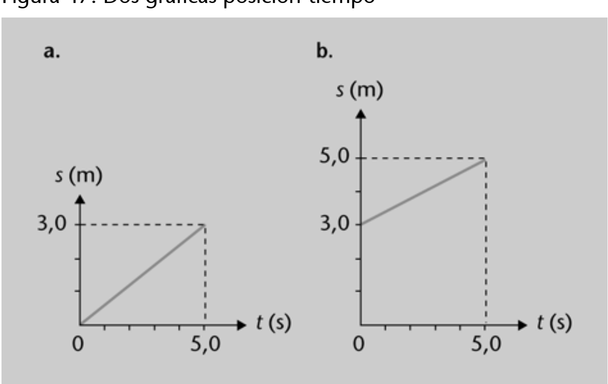
b) Una persona puede correr 100 m, como máximo, en unos 10 segundos, es decir, unos 10 m/s. ¿Cuántos km/h equivalen a 10 m/s? (Nota: no hace falta que hagáis los mismo cálculos de cambio de unidades que en el caso anterior. Podéis utilizar el resultado del apartado a) para hacer el cálculo mentalmente.)

c) La Tierra da una vuelta casi circular al Sol, que está a unos $1{,}5 \cdot 10^8$ km, en un año. ¿A qué velocidad (en m/s) nos movemos alrededor del Sol?

Problema 2.2. Gráficas distancia-tiempo

Calculad la velocidad del cuerpo a partir de las dos gráficas posición-tiempo siguientes:

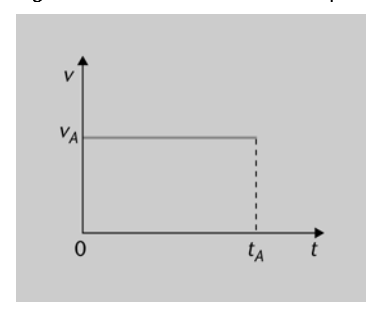
Figura 47. Dos gráficas posición-tiempo



Problema 2.3. Distancia recorrida a partir de la gráfica *v*(*t*)

¿Qué movimiento representa la gráfica siguiente? Y ¿qué representa el área del rectángulo que definen los ejes de coordenadas con las rectas $v = v_A$ y $t = t_A$?

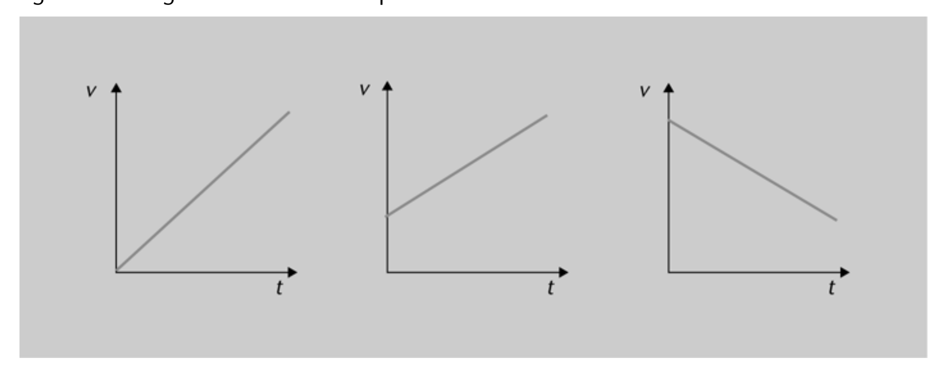
Figura 48. Gráfica velocidad-tiempo



Problema 2.4. Aceleraciones

¿Qué movimientos representan las gráficas siguientes? Describid los movimientos en términos de velocidades y aceleraciones y decid qué diferencias hay entre las tres gráficas.

Figura 49. Tres gráficas velocidad-tiempo



3. ¿Qué causa los movimientos?

El objetivo principal de este apartado es presentar una introducción cualitativa a la dinámica.

Hemos estudiado en los dos apartados anteriores los tipos de movimientos que hay y cómo se pueden describir en términos cinemáticos, es decir, sin analizar sus causas. El objetivo de este apartado y el del siguiente es iniciar el estudio de la **dinámica**.

> Se denomina **dinámica** la parte de la mecánica que estudia cómo analizar y describir los movimientos de los objetos a partir de las fuerzas que actúan sobre éstos. Además, la dinámica trata de averiguar qué fuerzas son las que provocan un movimiento concreto.

Igual que hicimos con la cinemática, comenzaremos el estudio de la dinámica en este apartado con un análisis cualitativo de los tipos de problemas que queremos abordar. En el próximo apartado haremos una aproximación más cuantitativa y vamos a enunciar las tres leyes básicas de la dinámica. Este apartado será relativamente breve, para darnos un respiro entre dos apartados bastante densos, el 2 y el 4.

¿Qué aprenderemos?

- Aprenderemos que hay sistemas de referencia provilegiados y que el concepto de movimiento es relativo, pero no así el de aceleración.

- Nos aproximaremos al concepto de fuerza que actúa sobre un cuerpo y vamos a ver que las fuerzas siempre actúan en parejas.

- Veremos también cómo podemos describir los efectos de los movimientos en términos de capacidad de hacer trabajo.

¿Qué supondremos?

Como la aproximación a las causas de los movimientos que presentaremos en este apartado será cualitativa, no necesitaremos como punto de partida herramientas matemáticas ni conceptos diferentes de los que hemos manejado en los apartados anteriores.

3.1. Sistemas de referencia

Si no se piensa, la respuesta a la pregunta "¿Estamos ahora mismo quietos o estamos en movimiento?" parece sencilla: si estamos trabajando esta asignatura sentados delante de una mesa, o apoyados en el sofá, diremos que estamos quietos. Pero si la trabajamos mientras viajamos en tren, diremos que estamos en movimiento. Sin embargo, la respuesta correcta (desde el punto de vista científico) es "depende". Tanto si estamos sentados en una silla como si vamos en tren, según quién sea el observador, éste dirá que estamos en reposo o que estamos en movimiento.

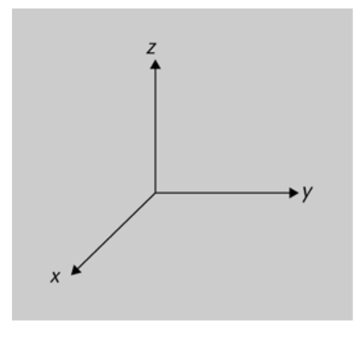
Así, para una persona que va en coche, o en cualquier vehículo con velocidad constante y en línea recta, son el resto de objetos (árboles, farolas, vacas) los que se mueven. Y si estamos sentados en casa, para un observador que nos mire desde la Luna ciertamente nos moveríamos nosotros, y no él, juntamente con la silla donde estamos sentados.

Para dar la posición de un objeto que se mueve utilizamos un *sistema de referencia*.

> Se denomina **sistema de referencia** al punto desde el cual se observa un movimiento, y a las tres direcciones del espacio que se emplean para localizar el objeto que se mueve.

Habitualmente representamos los sistemas de referencia como los ejes cartesianos, dirigidos según tres direcciones arbitrarias del espacio, *XYZ*, perpendiculares entre sí (figura 50).

Figura 50. Sistema de referencia cartesiano tridimensional



En cada caso podemos escoger las direcciones *XYZ* de la manera que más nos convenga para describir el movimiento. Por ejemplo, una partícula que se mueva en línea recta y a una velocidad constante, que en módulo vale v_0, puede describirse con el vector velocidad siguiente, referido a un determinado sistema de referencia:

$$\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{6}}(1,2,-1) = \frac{v_0}{\sqrt{6}}(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \qquad (163)$$

es decir, mediante las tres ecuaciones siguientes:

$$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{6}}, \quad v_y = 2\frac{v_0}{\sqrt{6}}, \quad v_z = -\frac{v_0}{\sqrt{6}} \tag{164}$$

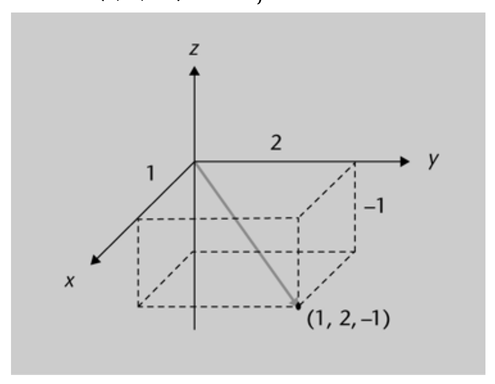
La dirección del espacio $(1, 2, -1) = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ se representa en la figura 51 respecto a unos ejes de coordenadas determinados. La dirección es la del vector que va desde el origen de coordenadas hasta el extremo opuesto del paralelepípedo que tiene estas coordenadas.

Dirección en el espacio

(*a*,*b*,*c*) = $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

La dirección en el espacio (*a, b, c*) es la misma que tiene un vector que va desde el origen de coordenadas hasta el punto P de coordenadas (*a, b, c*).

Figura 51. Dirección del espacio definida por el vector (1, 2, –1) = $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$



Observad que con el factor $1/\sqrt{6}$ en la expresión (164) nos aseguramos que el módulo del vector velocidad sea v_0, porque:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{v_0^2}{6}(1+4+1) = v_0^2 \tag{165}$$

La trayectoria de esta partícula, que se mueve a velocidad constante, será, análogamente a la que hemos visto en el subapartado 2.4, (ecuación 125), para el movimiento unidimensional:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t \tag{166}$$

donde $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es la posición de la partícula en el instante $t = 0$ (figura 52).

Las coordenadas del punto que se mueve son, pues:

$$x = x_0 + v_x \cdot t \tag{167a}$$

$$y = y_0 + v_y \cdot t \tag{167b}$$

$$z = z_0 + v_z \cdot t \tag{167c}$$

Pero si escogemos convenientemente el sistema de referencia, el mismo movimiento rectilíneo y uniforme se puede describir de manera más sencilla. Por ejemplo, podemos hacer que el eje *X'* del nuevo sistema de referencia esté dirigido según la dirección (1,2,–1) del sistema de referencia *XYZ* (figura 52). En este sistema *X'Y'Z'*, el vector velocidad tendrá la expresión siguiente:

$$\vec{v}\,' = v_0(1,0,0) = v_0\vec{i}\,' \qquad (168)$$

es decir:

$$v_{x'} = v_0,\ v_{y'} = 0,\ v_{z'} = 0 \qquad (169)$$

Y la trayectoria de la partícula será, ahora:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_0\,' + \vec{v}\,' \cdot t \qquad (170)$$

donde $\vec{r}_0\,' = (x_0\,', y_0\,', z_0\,')$ es la posición inicial de la partícula referida al nuevo sistema de referencia (figura 52).

Figura 52

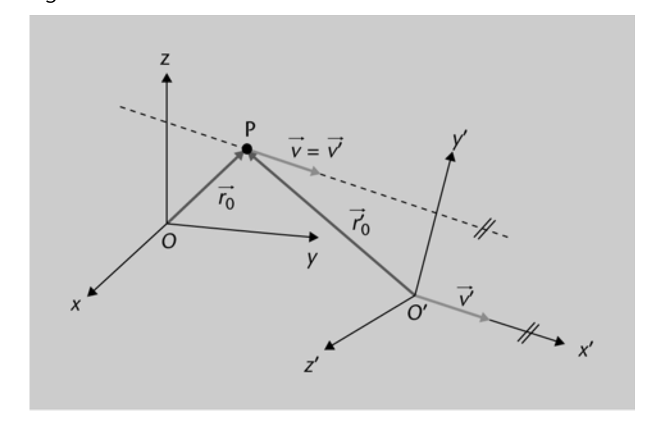


Figura 52

Representación del movimiento del punto P expresado por las ecuaciones (166) y (170) desde dos sistemas de referencia, *O* y *O'*. El signo // indica que el eje *x'* es paralelo a la recta discontinua.

Para cualquier otro tipo de movimiento, la expresión de las variables cinemáticas (posición, velocidad, aceleración) dependerá del sistema de referencia desde el cual lo analizamos.

En conclusión, cuando describimos un movimiento debemos especificar siempre desde qué sistema de referencia lo hacemos; por ejemplo, podemos decir que observamos el movimiento de un tren desde la estación (o desde un sistema de referencia fijado en la estación), o que observamos como pacen las vacas desde un sistema de referencia solidario al vehículo en el que nos encontramos.

Las características de un movimiento, que son la trayectoria que describe y la velocidad que tiene el objeto que se mueve, dependen del sistema de referencia desde el que se observa.

3.1.1. Sistemas de referencia inerciales

Hemos dicho al comenzar el subapartado 3.1 que a una persona que va en un vehículo y observa el exterior, le puede parecer que es el mundo exterior el que se mueve, y no ella. Esta sensación sólo es cierta en el caso del movimiento rectilíneo y uniforme, a velocidad constante; es el único caso en el que el movimiento se puede "confundir" con el estado de reposo.

Por el contrario, cuando vamos en un vehículo y éste se zarandea, nuestro cuerpo lo nota y no dudamos de que se trata de un cambio del estado de movimiento del vehículo, y no del mundo exterior al vehículo.

Se denominan **sistemas de referencia inerciales** aquellos que están en reposo o bien se mueven con velocidad rectilínea y uniforme.

Si un tren va en línea recta y a velocidad uniforme, dos sistemas de referencia, como el situado en la estación y el situado sobre el tren, son sistemas de referencia inerciales. Un avión que vuela a velocidad rectilínea y uniforme, también es un sistema de referencia inercial.

Actividad 3.1. La Tierra, sistema inercial

El sistema de referencia solidario a la estación del tren está fijado en la Tierra. Pero la Tierra se mueve. ¿Es inercial un sistema de referencia solidario a la estación del tren, como hemos supuesto?

Solución

Ya hemos visto en la actividad 2.10 que la Tierra es un cuerpo acelerado, tanto por el movimiento de rotación alrededor de su eje como por el movimiento de rotación alrededor del Sol. Por lo tanto, estrictamente hablando, la Tierra no es un sistema inercial.

Pero si hacemos un experimento o si analizamos un movimiento o un proceso que dura relativamente poco tiempo, podemos considerar el movimiento de la Tierra como rectilíneo y uniforme. Luego, a efectos prácticos, podemos considerar que un sistema de referencia solidario a la Tierra es inercial porque la órbita de la Tierra tiene un radio enorme y, por lo tanto, el movimiento orbital de la Tierra es prácticamente rectilíneo para intervalos de tiempo pequeños en comparación con la duración de un año.

El movimiento de rotación de la Tierra sobre su propio eje también se puede ignorar en la mayor parte de los fenómenos que nos interesarán.

Así, cualquier sistema de referencia que esté en reposo sobre la Tierra es un sistema de referencia inercial, en muy buena aproximación.

Los sistemas de referencia inerciales tienen una propiedad muy importante. Sabemos, por experiencia propia, que no podemos distinguir entre el movimiento rectilíneo y uniforme y el reposo: cuando estamos sentados en el tren y pasa por el lado de otro tren, si ambos viajan con movimiento rectilíneo y uniforme (que incluye el caso de velocidad nula de alguno de los dos trenes) no somos capaces de distinguir si nos movemos nosotros, el otro tren, ambos o ninguno de los dos. Aún existe otra manera de enunciar el hecho experi-

Reposo y velocidad constante

El caso $v = 0$ es un caso particular de v = constante.

Dos sistemas de referencia inerciales son indistinguibles, en el sentido que no podemos hacer ningún experimento que demuestre que un sistema inercial está en reposo y el otro no, o al revés.

mental anterior: **el estado de reposo absoluto no existe** (o no tiene sentido hablar de él).

Observemos que si vamos en tren (o en avión, en coche, etc.) y éste se mueve a velocidad rectilínea y constante en una dirección horizontal, podemos tener una taza de café sobre una superficie plana y la taza se mantendrá quieta y la superficie del líquido permanecerá bien plana, de la misma manera que si estuviésemos sentados en la terraza de un bar. Lo mismo podríamos decir de jugar a lanzar una pelota al aire y recogerla con la mano, o de un adorno que cuelga del techo del vehículo, etc. El comportamiento del café, de la pelota, del adorno colgante, etc., sería el mismo en cualquier sistema de referencia inercial.

Pero si el vehículo frena en seco, o acelera, o toma una curva de manera brusca, puede que el café se derrame, y seguramente la superficie del líquido y la taza se moverán; ¡hasta nosotros mismos nos zarandearemos! Tampoco podríamos recoger como antes la pelota que hemos lanzado al aire, y el adorno ya no colgaría en dirección vertical.

En la actividad siguiente continuaremos comentando cómo se ve un movimiento desde diferentes sistemas de referencia inerciales.

Actividad 3.2. La descripción de la trayectoria de un objeto en movimiento es relativa

Vais en un tren a una velocidad rectilínea y uniforme y dejáis caer una piedra por la ventana, sin velocidad inicial (no la lanzáis: simplemente abrís la mano y la piedra cae fuera del vehículo). Describid y haced un esquema de cómo veríais el movimiento de la piedra vosotros y una persona que lo mirara desde el suelo. Es decir, representad el movimiento de la piedra desde el sistema de referencia vuestro y desde un sistema de referencia situado en el exterior del vehículo y solidario al suelo.

Solución

Visto desde el tren, la piedra cae al suelo en línea recta, tanto si el tren está en reposo como si se mueve con velocidad rectilínea y uniforme (figura 53a).

Visto desde el exterior del tren, cuando abrimos la mano la piedra tiene una velocidad inicial horizontal que coincide con la del tren y la trayectoria que se verá desde fuera del tren es parabólica. Gráficamente se muestra en la figura 53, en **a** el caso visto desde el tren y en **b**, el caso visto desde fuera.

Figura 53

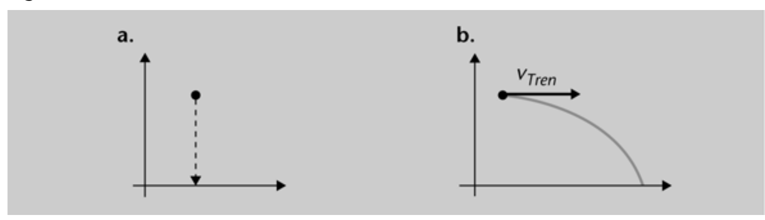


Figura 53

Trayectoria de caída de un objeto visto **a.** desde el tren o **b.** desde el suelo.

La trayectoria parabólica de la piedra vista desde un punto en reposo exterior al tren es la misma que tiene un proyectil que lanzamos horizontalmente desde un sistema de referencia inercial.

En la figura 54 combinamos ambos puntos de vista, el de la persona que observa la caída del objeto desde el tren y el de la persona que lo observa desde el suelo. La persona que deja caer la piedra la ve siempre debajo de la ventana y cada vez más cerca del suelo.

Figura 54. Movimiento de caída de un objeto visto desde el tren o desde el suelo

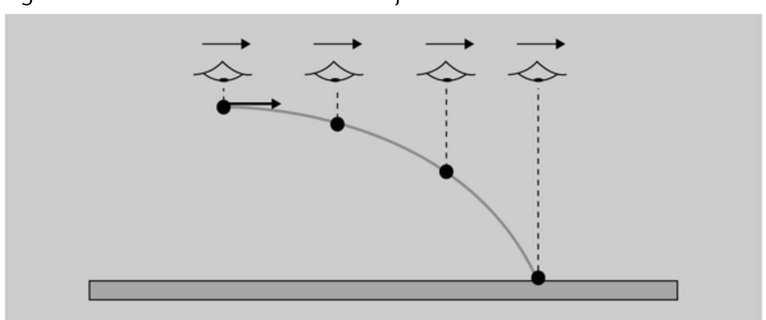


Figura 54

El ojo representa la ventana del tren. El viajero ve un movimiento vertical de caída libre. El observador externo ve una trayectoria parabólica.

Por otro lado, es posible que hayáis tenido la experiencia de dejar caer objetos como un papel o una bolsa desde un tren o un coche, y hayáis podido ver cómo el objeto se ve arrastrado en dirección contraria a vuestro movimiento. Es decir, no cae verticalmente al suelo fuera de la ventana. En este caso está jugando un papel importante el rozamiento causado por el aire, y esta fuerza es la que frena el objeto y modifica la situación que hemos comentado en las figuras anteriores. (Un buen ejercicio es que os imaginéis como sería la trayectoria del objeto vista desde los dos sistemas de referencia mencionados.)

La discusión de las trayectorias de las partículas vistas desde sistemas de referencia diferentes es complicada. Pero el análisis de los movimientos en términos de velocidades o de aceleraciones es más sencillo, como vamos a ver ahora.

3.1.2. Movimiento relativo y velocidad relativa

Según lo que acabamos de decir, cuando el movimiento del vehículo (un vagón de metro, por ejemplo) es rectilíneo y uniforme, es equivalente decir que el metro se aproxima al andén o que el andén se acerca al vagón. En los casos anteriores, la velocidad *relativa* entre el vagón y el andén será $\vec{v}$ o $-\vec{v}$, según si hablamos desde un sistema de referencia inercial o desde otro. Podemos hacer el esquema equivalente de la figura 55, en el que un coche juega el papel del vagón, y un edificio el del andén.

Figura 55. Movimiento relativo entre dos sistemas de referencia inerciales

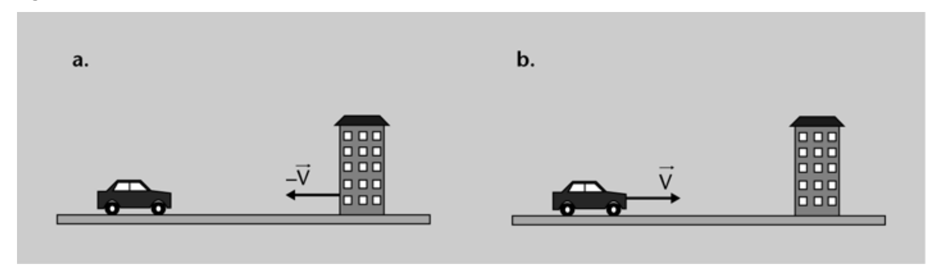


Figura 55

a. El movimiento del edificio observado desde el coche.

b. El movimento del vehículo visto desde el edificio.

De la misma manera, suponemos que, visto desde un sistema inercial externo, como un edificio, dos vehículos se aproximan el uno al otro y tienen velocidades $\vec{v}_1$ y $-\vec{v}_2$, respectivamente. Entonces cada uno de los vehículos puede decir que su sistema de referencia está en reposo y dirá también que el sistema de referencia externo, solidario al edificio, tiene una velocidad contraria a la del vehículo. El vehículo 1, por ejemplo, dirá que el edificio se le acerca a una velocidad $-\vec{v}_1$, análogamente a la situación de la figura 55a.

Actividad 3.3. Velocidad relativa

En el ejemplo de los dos vehículos del párrafo anterior, ¿qué velocidad diría un observador de un vehículo que tiene el otro vehículo?

Solución

Cada uno de ellos diría que su sistema de referencia está en reposo, pero que el otro vehículo se le acerca a una velocidad que es la suma de ambas velocidades, es decir, $-(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, visto desde el vehículo 1, o $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ visto desde el 2.

Por lo tanto, las velocidades de un objeto tienen valores diferentes según el sistema de referencia desde el que se miden. ¿Y qué ocurre con las aceleraciones?

3.1.3. Aceleraciones y sistemas inerciales

Como acabamos de ver, si desde los dos sistemas inerciales de la figura 55, el coche y el edificio, observamos un tercer cuerpo, cada uno le asignará una velocidad diferente. Si el observador del edificio, *O*, dice que el tercer cuerpo tiene una velocidad $\vec{v}$, entonces el sistema inercial situado en el coche, *O'*, le asignará al cuerpo una velocidad diferente:

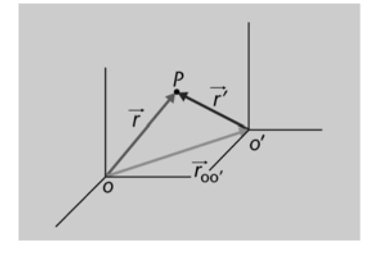
$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V} \tag{171}$$

donde $\vec{V}$ es la velocidad del sistema solidario al vehículo, *O'*, medida desde el edificio.

Este resultado se obtiene del análisis de la figura 56, que muestra cómo determinamos la posición del tercer cuerpo, P, desde los sistemas de referencia *O* y *O'*. La posición del cuerpo es $\vec{r}$ desde el sistema *O*, y es $\vec{r}\,'$ desde el sistema *O'*. Si el sistema *O'* está en la posición $\vec{r}_{OO'}$ referida al sistema *O*, podemos escribir que $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}$ (suma de vectores); es decir:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{OO'} \tag{172}$$

Figura 56. Localización de una partícula *P* desde dos sistemas de referencia *O* y *O'*



Si ahora derivamos los dos miembros de la expresión anterior con respecto al tiempo, obtenemos el resultado (171), porque $d\vec{r}\,'/dt = \vec{v}\,'$ es la velocidad de P medida desde *O'*, $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ es la velocidad de *P* medida desde *O* y $d\vec{r}_{OO'}/dt = \vec{V}$ es la velocidad del sistema *O'* con respecto al sistema *O*.

Pero es importante subrayar que si el primer sistema inercial (el situado en el edificio) mide la aceleración siguiente para el tercer cuerpo:

$$\vec{a} = d\vec{v} / dt \quad (173)$$

el sistema inercial solidario al coche le asignará la misma aceleración. Esto se puede demostrar a partir de la relación (171), si calculamos la aceleración que observaría el sistema *O'*:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d(\vec{v} - \vec{V})}{dt} \quad (174)$$

Ahora tenemos en cuenta que la derivada de una suma de funciones es la suma de derivadas de cada función, y obtendremos:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (175)$$

Y, finalmente, como para sistemas inerciales la velocidad relativa, en este caso $\vec{V}$, es constante, entonces $d\vec{V} / dt = 0$, y tenemos:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (176)$$

Pero el miembro de la derecha es la aceleración que mide el primer sistema inercial, $\vec{a}$. Hemos demostrado así que ambos sistemas inerciales asignarán la misma aceleración al tercer cuerpo que se mueve:

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (177)$$

El resultado anterior es importante, porque indica que mientras que, según la ecuación (171) $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$, las **velocidades son relativas**; las **aceleraciones, en cambio, son absolutas** cuando se miden desde sistemas inerciales.

Así, pues, tenemos que:

Las velocidades de los objetos son magnitudes relativas, cuyo valor depende del sistema de referencia inercial en el que se miden.

Dos sistemas de referencia inerciales obtendrán la misma aceleración para un objeto externo.

Veremos en el apartado 4 que esta propiedad de los sistemas de referencia inerciales es esencial para poder enunciar las leyes de la dinámica de manera sencilla.

3.1.4. ¿Qué hemos aprendido?

- El estado de movimiento rectilíneo y uniforme y el estado de reposo son equivalentes a efectos físicos: no podemos distinguirlos, ni hacer experimentos que permitan detectarlos como situaciones diferentes.

- Un sistema de referencia inercial es uno que se mueve a velocidad constante (uno que tiene un movimiento rectilíneo y uniforme) o que está en reposo.

- Los sistemas de referencia inerciales son indistinguibles y sólo podemos hablar de la velocidad relativa de un sistema inercial con respecto a otro. No tiene sentido hablar de velocidad absoluta de ningún sistema de referencia inercial.

- La aceleración de un objeto, por el contrario, sí que tiene el mismo valor cuando se mide desde sistemas de referencia inerciales diferentes.

Los movimientos en la naturaleza raramente son rectilíneos y uniformes, al menos durante intervalos de tiempo largos. ¿Qué hace que cambien estos movimientos? Vamos a verlo.

3.2. Cambios en el estado de movimiento. Fuerzas

Muchas situaciones de la vida diaria involucran cambios en el estado de reposo o de movimiento de los objetos. En términos físicos decimos que sobre los objetos ha actuado una **fuerza**. Una fuerza ejercida sobre un objeto altera su movimiento. Veamos algunos ejemplos:

1) Cuando vamos en coche y pisamos el freno, o simplemente dejamos de apretar el acelerador, el vehículo termina por detenerse.

2) Cuando jugamos a tenis o a ping-pong, y golpeamos la pelota que viene hacia nosotros, ésta se mueve en otra dirección y sentido.

3) Cuando jugamos a billar y golpeamos una bola, ésta se pone en movimiento en línea recta. Y si queremos que se mueva con mayor rapidez, debemos darle un golpe más fuerte con el taco.

4) Cuando lanzamos una pelota de baloncesto, o cuando chutamos un balón y se levanta del suelo, la trayectoria del balón no es rectilínea, por la acción de la Tierra.

5) Cuando cae una maceta de flores sobre el capó de un coche, lo abolla, y puede que el objeto llegue a detenerse.

6) Cuando una pelota cae al suelo, rebota (¿se deforma la pelota cuando toca el suelo?).

En los ejemplos anteriores decimos que entran en juego diversas acciones, o fuerzas.

Actividad 3.4. Fuerzas que actúan

Indicad muy brevemente qué fuerzas actúan sobre los objetos anteriores justo en el momento inicial en el que ejercemos la acción correspondiente (frenar, golpear, etc.) y en momentos posteriores.

Solución

Las fuerzas que actúan son:

- las del freno (caso 1);
- las de fricción de las ruedas del vehículo con el asfalto, o la fricción en una mesa de billar (casos 1, 3) (también podríamos hablar de la fricción del aire en el movimiento de las pelotas de tenis, por ejemplo);
- las de impacto de la raqueta o el taco con la pelota o la bola (casos 2 a 6) o el impacto del pie en el caso 4;
- la fuerza gravitatoria de la Tierra que hace caer los objetos en una trayectoria que es vertical o parabólica (casos 2, 4, 5, 6);
- la fuerza que ejerce el capó sobre la maceta, o la pelota sobre la raqueta (casos 2 a 6).

En el caso 5, la maceta puede deformar el capó, pero también puede que la fuerza que ejerce el capó sobre la maceta sea una fuerza elástica: el peso de la maceta deforma el capó, el cual, al recuperar su forma, hace rebotar la maceta. Lo mismo pasa con la red de cuerdas de una raqueta de tenis: se deforma al recibir el impacto de la pelota y al recuperar la forma lanza la pelota en sentido contrario al del impacto.

Respecto al caso 6, cuando una pelota cae al suelo siempre se deforma más o menos, según la elasticidad que tenga la pelota y la velocidad con la que choca contra el suelo. Esto es fácil de ver con una pelota grande de plástico blando y llena de aire o de agua. También se deforma de manera análoga la pelota de tenis o el balón de fútbol.

En la actividad anterior hemos hablado de fuerzas de fricción o de rozamiento, de la fuerza de la gravedad, de fuerzas elásticas, etc. Todas estas fuerzas se pueden representar con un vector que indica hacia dónde se dirigen.

Actividad 3.5. Trayectoria y dirección de las fuerzas

Esbozad un esquema de la trayectoria de una pelota de baloncesto que se dirige contra el tablero y rebota, y representad también las fuerzas que actúan sobre la pelota antes del choque, durante el choque con el tablero y en el movimiento posterior al rebote.

Solución

Figura 57. Impacto de una pelota sobre un tablero y rebote

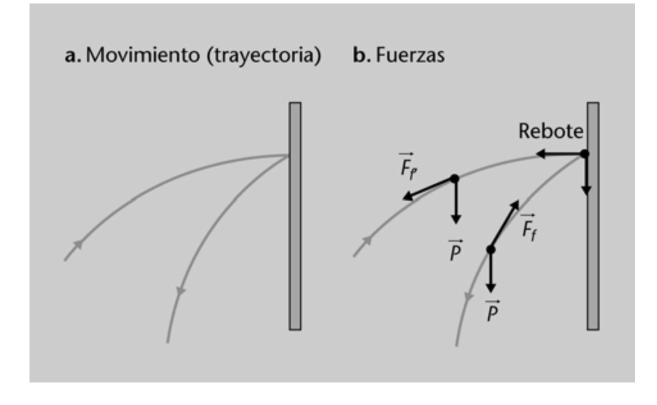


Figura 57

a. Movimiento (trayectoria) de la pelota.
b. Fuerzas que actúan sobre la pelota en tres instantes del movimiento.

Mientras la pelota vuela hacia el (o desde el) tablero (figura 57a), no actúa ninguna fuerza aparte de la gravedad terrestre, que denominamos *peso*, $\vec{P}$, y la fricción del aire, $\vec{F}_f$ (y $\vec{F}_{f'}$ cuando vuela desde el tablero), que siempre se opone al movimiento de la pelota (figura 57b). En el momento del impacto actúa la fuerza que el tablero ejerce contra la pelota, perpendicular al tablero, y la gravedad terrestre, que siempre está presente (para simplificar el análisis no consideramos la fricción que hay entre la pelota y el tablero).

En el ejemplo anterior vemos que en cada instante actúan fuerzas diferentes, que tienen magnitudes y direcciones diferentes. Sólo el peso actúa en todo momento y siempre en la misma dirección y sentido.

3.2.1. ¿Qué hemos aprendido?

- Las fuerzas provocan cambios en el estado de movimiento de los cuerpos.
- Las fuerzas de impacto (o de lanzamiento) actúan sólo en el momento del impacto o del lanzamiento, pero no durante el movimiento posterior del objeto.
- La Tierra actúa en todo momento y hace caer los objetos, pero a veces no se nota, como cuando una bola de billar se mueve por una mesa horizontal, porque otros cuerpos evitan que esta fuerza actúe, es decir, la contrarrestan.
- En los movimientos que observamos en la vida diaria, la fuerza de rozamiento o de fricción también actúa siempre, con mayor o menor intensidad: hay fricción en el movimiento de un objeto a través del aire, o sobre el asfalto, o sobre una mesa de billar, etc. Pero en algunos casos la fricción es pequeña en comparación con el resto de fuerzas que intervienen y puede despreciarse.
- En un problema concreto debemos analizar qué fuerzas son importantes para describir un movimiento y cuáles no; es decir, cuáles son despreciables en comparación con el resto. Por ejemplo, en el movimiento de la bola de billar, la fuerza que ejerce la Tierra no tiene ningún efecto (salvo el de mantener la bola sobre la mesa). Y en el movimiento de una piedra, la fricción del aire es, en general, despreciable en comparación con su peso.

Hemos visto que hay diversos tipos de fuerzas y que aplicando fuerzas conseguimos mover objetos, detenerlos o cambiar su estado de reposo o de movimiento. Profundizaremos ahora en qué característica de los objetos hace que las fuerzas que se aplican tengan efectos diferentes.

3.3. Movimiento y reposo. Inercia

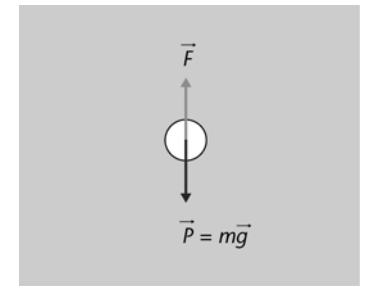
Suponed que tenéis unos papeles encima de la mesa y que están en reposo. ¿Actúa alguna fuerza sobre los papeles? Hemos dicho en el subapartado anterior que la fuerza de la gravedad actúa en todo momento y sobre cualquier objeto que tenga masa. Por eso decimos que los objetos tienen **peso**.

> El **peso** de un objeto de masa *m* es la fuerza con la que la Tierra lo atrae, y vale $\vec{P} = m\vec{g}$.

La aceleración de la gravedad $\vec{g}$ siempre está dirigida hacia el centro de la Tierra, es decir, verticalmente y hacia abajo.

Pero los papeles están encima de la mesa, que impide que caigan al suelo. Por lo tanto, diremos que la mesa también ejerce una fuerza sobre los papeles. Si queremos levantar los papeles de la mesa, hemos de sujetarlos (aplicarles una fuerza), y en ese momento diríamos que nuestra acción "vence" la fuerza de la gravedad: sobre los papeles que mantenemos en el aire actúan nuestras manos (que ejercen una fuerza) y la fuerza de la gravedad terrestre (observad la figura 58).

Figura 58. El peso y nuestra mano actúan sobre un objeto que sostenemos en el aire



Pero no siempre es tan fácil aplicar una fuerza y mover objetos como en el caso de los papeles.

Actividad 3.6. Mover objetos

Queremos mover una estantería llena de libros. ¿Por qué cuesta tanto? Y si queremos arrastrar una silla o una bombona de butano vacía, ¿por qué nos cuesta menos?

Solución

Solemos decir que el mayor o menor peso de los objetos es lo que nos permite moverlos con mayor o menor facilidad. Pero esta afirmación no es correcta. Aunque no podéis hacer el experimento, si movierais los objetos en el espacio, en una región muy alejada de planetas y de estrellas, de manera que los objetos no "pesasen", seguiría siendo mucho más fácil mover la bombona que la estantería. Es la masa del objeto, la cantidad de materia, y no el peso, lo que cuenta.

En el caso familiar de los objetos que están en el suelo y queréis arrastrarlos, debéis hacer fuerza para vencer la fricción (o rozamiento) que ejerce la base de los objetos sobre la superficie en la que se encuentran. La fuerza de fricción es proporcional al peso de los objetos.

Las cuestiones anteriores se podrían plantear al revés: supongamos que en lugar de provocar movimientos en objetos que están en reposo, queremos detener objetos que están en movimiento. Imaginemos que sobre una superficie inclinada se está moviendo una estantería llena de libros o una bombona de butano vacía. ¿Qué objeto será más fácil de detener? La respuesta es que, cuanta más masa tiene un objeto en movimiento, más difícil es detenerlo, de la misma manera que cuanta más masa tenga, más difícil será moverlo, si está en reposo. Decimos que más masa equivale a más **inercia**.

> La **inercia** es la dificultad que presenta un cuerpo para moverlo o para detenerlo.

Vamos a explorar el concepto de inercia.

Actividad 3.7. Efectos de la inercia

Cuando la pieza de hierro de un martillo está floja, una manera de conseguir que quede bien fijada a la madera es dar un golpe seco al martillo por la parte del mango (figura 59). Esto permite encajar mejor el hierro. Explicad por qué.

Figura 59

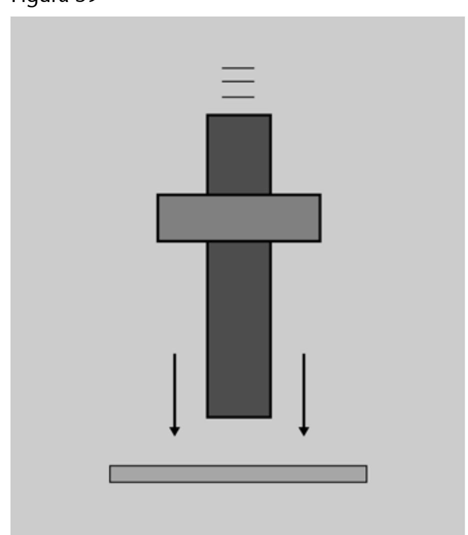


Figura 59

Para fijar la pieza de hierro a la madera de un martillo damos un golpe seco al mango del martillo contra el suelo o contra una superficie dura.

Solución

Con esta acción aprovechamos la inercia de una masa en movimiento: cuando movemos el martillo hacia la mesa, movemos tanto la madera como el hierro. Con el golpe seco frenamos la madera, pero la pieza de hierro, que está floja y tiene mucha más inercia (porque tiene mucha más masa que la madera), es más difícil de detener y continúa moviéndose un poco hacia la mesa. De esta manera, se fija mejor la pieza de hierro a la madera.

Como vemos, podemos describir acciones cotidianas en términos científicos.

¿Qué hemos aprendido?

- La inercia de un objeto es la dificultad que opone para ponerlo en movimiento o para detenerlo.
- Hay que ejercer fuerzas para poner objetos en movimiento, y también para detenerlos. Según la inercia del cuerpo, la fuerza que haya que ejercer sobre cada cuerpo será diferente.
- En términos físicos, no debemos decir que un objeto que *pesa* más tiene más inercia, sino que la *masa* es la responsable de la inercia que presenta el objeto.

Hasta ahora hemos analizado una parte de lo que ocurre al ejercer una fuerza: hemos hablado de la Tierra que atrae los cuerpos, o de la raqueta que golpea la pelota, etc. A continuación vamos a ver que las fuerzas no actúan solas, sino por pares.

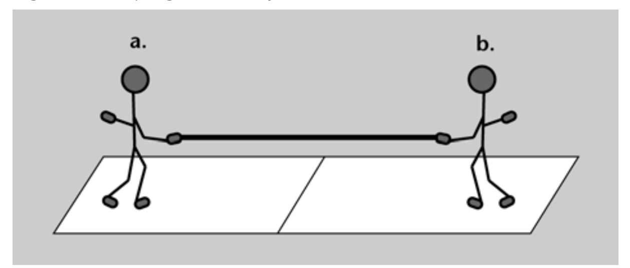
3.4. Acción y reacción

Cuando golpeamos una pelota de tenis, la raqueta y la mano que sostiene la raqueta notan el efecto del golpe: la raqueta golpea la pelota, pero también la pelota ejerce una acción (una fuerza) sobre la raqueta. Si observáis vuestra experiencia diaria, podríamos decir que cualquier fuerza está asociada a otra: se trata de las f**uerzas de acción y reacción**.

Si golpeamos la mesa con el puño nos hacemos daño, por lo tanto también podemos decir que la mesa golpea nuestro puño. “Es imposible tocar sin ser tocado”.

¿Cómo se puede hacer el análisis de las fuerzas que actúan en una situación dada? Pensad en la competición de tirar de una cuerda por parte de dos personas que pretenden que el otro cruce una línea marcada en el suelo (observad la figura 60).

Figura 60. El juego de tirar y arrastrar



Si la cuerda no se desplaza es porque ambas personas tiran de ella con la misma fuerza. Si una persona tira con más fuerza, puede mover la cuerda hacia ella lo suficiente como para ganar la partida. ¿Qué fuerzas actúan en esta situación?

Actividad 3.8. Dirección de las fuerzas

Indicad cuáles de estas fuerzas actúan en la competición de la figura 60, y hacia dónde están dirigidas:

- Tracción (la fuerza que ejercen las personas).
- Tensión (la fuerza que ejerce la cuerda).
- Fricción (el rozamiento, allá donde actúe).
- Peso.

Solución

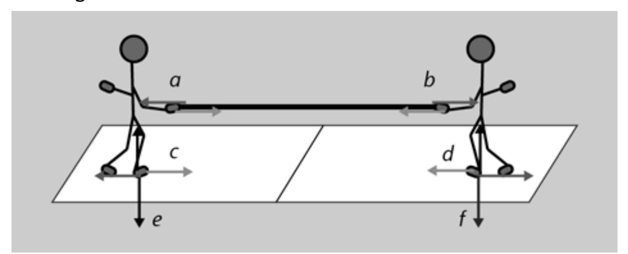
Las personas ejercen una fuerza sobre la cuerda, las fuerzas *a* y *b* en la figura 61. La cuerda está sometida a una fuerza, que se denomina *tensión*, y ejerce una fuerza sobre las personas (las fuerzas opuestas a *a* y *b*).

Las personas aprovechan la fuerza de rozamiento de los zapatos contra el suelo para intentar no moverse: *c* y *d* son las fuerzas que ejercen las personas contra la superficie del suelo, y esta superficie ejerce fuerzas contrarias sobre las personas. Por ejemplo, *c* es la fuerza que ejerce la persona de la izquierda sobre el suelo cuando la otra persona intenta que se le acerque. Por esto, el suelo ejerce la fuerza de reacción opuesta a *c*, es decir, en contra del posible movimiento de la persona de la izquierda.

Las personas y la cuerda experimentan la atracción de la Tierra, tienen un peso: *e* y *f* (no se ha representado el peso de la cuerda en la figura 61, para no complicarlo más).

También el suelo (la superficie sobre la que se hallan las personas) ejerce una fuerza contra las personas que se opone a su peso (las fuerzas opuestas a *e* y a *f*).

Figura 61. Pares de fuerzas que actúan en la situación de la figura 60



Por lo tanto, **acción y reacción** actúan juntas pero no sobre el mismo cuerpo.

> Por cada fuerza que actúa en un sentido, tenemos la fuerza contraria, que es de la misma magnitud, y cada fuerza de este par acción-reacción actúa sobre un cuerpo diferente.

De esta manera, en la situación de la figura 60, la persona de la derecha tira de la cuerda hacia la derecha y la cuerda ejerce la misma fuerza sobre la persona de la derecha, pero en sentido contrario, hacia la izquierda. Igual pasa con cualquier otra fuerza. Por ejemplo, la Tierra atrae la cuerda con una fuerza (el peso de la cuerda), y lo mismo hace la cuerda: atrae la Tierra con una fuerza igual en valor absoluto al peso de la cuerda.

Y así, para cada fuerza que actúa en cualquier situación, siempre hay otra emparejada, igual y opuesta; ¡pero las dos fuerzas del par actúan sobre cuerpos diferentes! Se denominan *fuerzas de acción y reacción*. Este hecho debe tenerse siempre presente: sobre cada cuerpo sólo actúa *una* de las fuerzas del par acción-reacción. El peso de un objeto es la fuerza que ejerce la Tierra *sobre el objeto*; la fuerza de reacción correspondiente es la fuerza que ejerce el objeto *sobre la Tierra*. Las dos fuerzas del par acción-reacción son iguales en módulo.

Vamos a ver otro ejemplo.

Actividad 3.9. Parejas de fuerzas

a) ¿Qué pares de fuerzas actúan en el caso de un ave que vuela?
b) ¿Qué fuerzas actúan sobre el ave?

Solución

a) Podemos aproximar el vuelo de un ave diciendo que éste vuela porque mueve las alas e impulsa el aire hacia atrás: la fuerza que ejercen las alas empujando el aire hacia atrás es igual, pero opuesta, a la fuerza que ejerce el aire sobre el ave, y que lo empuja hacia adelante y lo hace avanzar.

La fricción o rozamiento del ave contra el aire frena el avance del ave. Esta fuerza es igual, pero opuesta, a la que el ave ejerce contra el aire.

La Tierra atrae al ave hacia abajo. El ave atrae la Tierra con una fuerza igual a su peso, pero dirigida hacia el ave.

En la figura 62a mostramos los pares de fuerzas que intervienen cuando un ave vuela hacia la izquierda, y que hemos designado de la manera siguiente:

- $\vec{F}_1$: impulso de las alas que apartan el aire hacia la derecha.
- $\vec{F}_2$: reacción del aire, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, que impulsa al ave hacia la izquierda.
- $\vec{F}_3$: rozamiento del aire, que va en la dirección contraria al movimiento.
- $\vec{F}_4$: reacción del ave sobre el aire, $\vec{F}_4 = -\vec{F}_3$.
- $\vec{P}$: peso del ave, la fuerza que la Tierra ejerce sobre el ave.
- $\vec{F}_T$: atracción de la Tierra por parte del ave, $\vec{F}_T = -\vec{P}$.

Figura 62

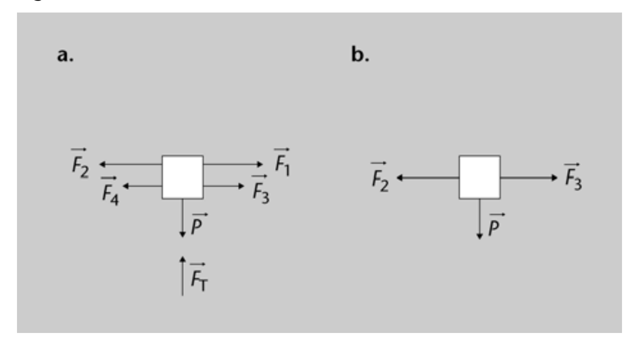


Figura 62

a. Un ave que vuela hacia la izquierda y todos los pares de fuerzas acción-reacción que actúan sobre el sistema ave-aire-Tierra. **b.** Fuerzas que actúan sobre el ave.

b) De todas las fuerzas mencionadas sólo actúan sobre el ave las que mostramos en la figura 62b: el peso, el impulso del aire y la fricción contra el aire.

El problema del vuelo de las aves es más complicado. Veremos en el apartado siguiente que si la descripción de la figura 62 fuese correcta, el ave caería hacia el suelo en un movimiento parabólico.

Como habitualmente sólo nos interesa saber qué movimiento tiene un cuerpo, no nos hemos de preocupar de las fuerzas que este cuerpo ejerce contra los otros, sino que sólo deberemos tener en cuenta una de las dos fuerzas de cada par acción-reacción.

Las fuerzas son magnitudes vectoriales: además del módulo de las fuerzas es importante saber en qué dirección actúan, porque esto también explica qué efecto ejercen.

Dirección de las fuerzas

Cuando un cuerpo no se mueve, podemos pensar que no actúa ninguna fuerza. Pero ya hemos visto que es más correcto decir que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre este cuerpo (lo que se llama *resultante* de las fuerzas) es nula, porque, teniendo en cuenta que estamos en la Tierra, *siempre* actúa, como mínimo, la fuerza de la gravedad. La resultante de un conjunto de fuerzas es la suma de las fuerzas.

Pensemos en un cuadro que cuelga en la pared o en un gimnasta que hace anillas, como en la figura 63. ¿Qué fuerzas actúan, por ejemplo:

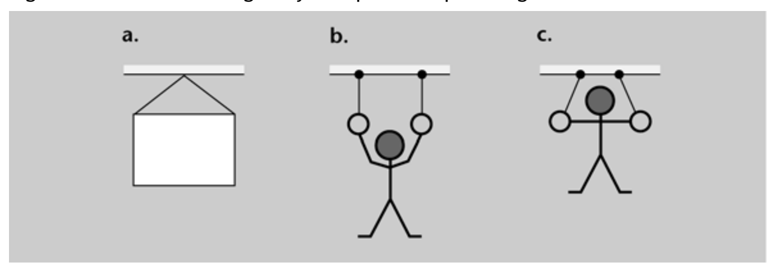
a) sobre el clavo que sostiene el cuadro?
b) sobre la mano izquierda del gimnasta de la figura 63b?

Actividad 3.10. Fuerzas y direcciones de las resultantes

Contestad las dos preguntas anteriores y también la siguiente:

c) Todos podemos hacer la posición de la figura 63b: sólo hace falta que nuestros brazos aguanten nuestro peso (de hecho, cada brazo sólo ha de aguantar la mitad de nuestro peso). Pero, ¿por qué es más difícil de hacer la postura 63c?

Figura 63. Un cuadro colgado y una persona que cuelga de unas anillas



Solución

a) El clavo sostiene el cuadro. Por lo tanto, el clavo ejerce una fuerza igual al peso del cuadro. Pero la fuerza del peso actúa sobre el cuadro, *no* sobre el clavo. La fuerza que actúa sobre el clavo es la que le transmite el cuadro a través de los hilos con los que lo atamos.

En un análisis más detallado, podríamos decir que también la Tierra ejerce una fuerza sobre el clavo, y que la pared donde el clavo está clavado ejerce otra fuerza sobre el clavo. Pero en el análisis de la figura 63a se sobreentiende que nos queremos fijar sólo en el sistema cuadro-hilos-clavo, aunque no podemos olvidar la acción "indirecta" de la Tierra sobre el cuadro, porque sin el peso del cuadro no habría problema para resolver.

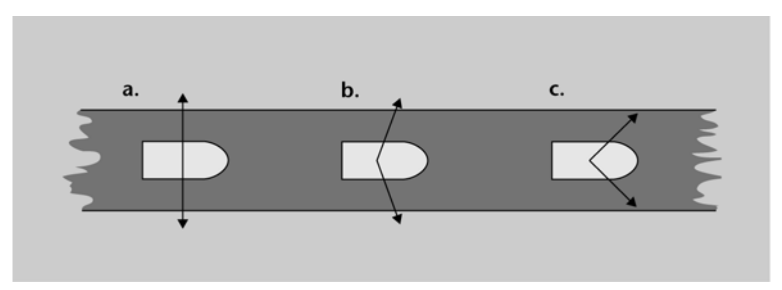
b) Sobre la mano izquierda del gimnasta en la figura 63b actúa la tensión del hilo que lo soporta (y tira de la mano hacia arriba) y también parte del peso de la persona (que tira de la mano hacia abajo a través del brazo). Las dos fuerzas deben equilibrarse.

c) La postura 63c es más difícil que la 63b porque los músculos están sometidos a una tensión mayor, por la dirección de las fuerzas que actúan. Para profundizar en la respuesta a esta pregunta necesitamos aprender a representar las fuerzas y a operar con ellas. Lo veremos en el apartado 4.

Cuando un cuerpo está en equilibrio, la suma de fuerzas que actúan sobre él es nula. Pero esta suma de fuerzas debe ser una suma vectorial, es decir, que tenga en cuenta las direcciones en las que actúan las fuerzas.

Pensemos en otra situación: una barca que se remolca por un río de tres maneras diferentes, como podéis ver en la figura 64. Las flechas indican la dirección en la que tiramos de la barca con dos cuerdas.

Figura 64. Tres maneras de remolcar una barca tirando de ella con dos cuerdas en las direcciones de las flechas



Actividad 3.11. Dirección de las fuerzas y efecto resultante

¿Qué diferencia hay entre las tres situaciones de la figura 64?

Solución

Con la situación **a** no conseguiremos mover la barca, porque estaremos tirando en direcciones opuestas con la misma fuerza.

Si tiramos de la barca con dos fuerzas orientadas según un ángulo agudo (en las direcciones de la figura 64c), lograremos un efecto mayor (para la misma fuerza) que si tiramos de manera que las fuerzas formen un ángulo más obtuso, como en la figura 64b.

Por lo tanto, las fuerzas son más o menos efectivas según la dirección con la que se apliquen. Cuando decimos que una fuerza es más o menos efectiva estamos hablando de qué parte de la fuerza se "aprovecha" para lo que queremos; así, si tiramos de un carro, intentaremos tirar de él en paralelo al suelo, y no desviados hacia arriba o hacia abajo, porque esta desviación evitaría que aprovecháramos una parte de la fuerza al desplazar el carro.

También es importante el punto donde se aplican las fuerzas, porque en la situación de la figura 65, por ejemplo, no obtendremos el mismo efecto si aplicamos las fuerzas en un punto fuera del eje de simetría de la barca. En el caso de la figura 65a, la barca avanzará; en los dos últimos casos, 65b y 65c, la barca no sólo avanzará, sino que girará dentro del agua.

Figura 65

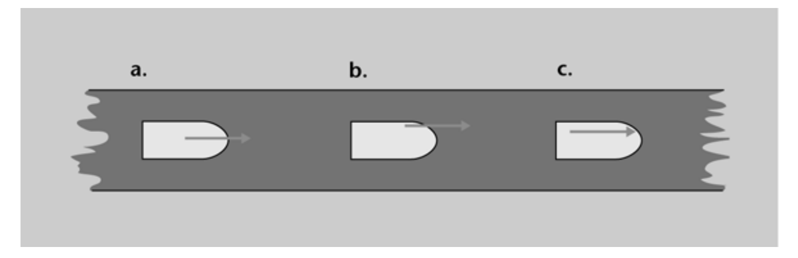


Figura 65

El punto de aplicación de una fuerza también tiene importancia. Si tiramos de la barca con una cuerda en las direcciones indicadas con las flechas, intuimos que en los casos **b** y **c** la barca puede girar dentro del agua, además de avanzar.

3.4.1. ¿Qué hemos aprendido?

- Las fuerzas siempre se encuentran por pares, pero actúan sobre cuerpos diferentes.

- El peso de un objeto siempre está presente, y todo objeto atrae a la Tierra con una fuerza igual y contraria a su peso.

Hemos visto que la magnitud *fuerza* (que definiremos formalmente en el apartado siguiente) es una magnitud vectorial: importa su punto de aplicación, su módulo o intensidad, su dirección y su sentido.

¿Cómo continuaremos?

Hemos visto que las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo causan cambios en su estado de reposo o de movimiento. Veremos ahora brevemente que los mismos cuerpos pueden provocar efectos (fuerzas) sobre otros objetos.

3.5. Efectos de los movimientos

Todos sabemos que no es lo mismo si nos cae un bolígrafo en el pie que si es un libro. Asimismo, si recordamos la expresión del tiempo de caída de un billete (ecuación (1) del subapartado 1.2, que dedujimos en el subapartado 2.4.4, ecuación (149)), podemos decir que el tiempo que tarda en caer un objeto (un libro, un lápiz) en caída libre (es decir, únicamente bajo la acción de la gravedad) y desde una altura *h*, es el mismo para el lápiz que para el libro:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{178}$$

Por otra parte, en el subapartado 3.3 hemos dicho que podemos levantar un objeto si le aplicamos una fuerza que contrarreste su peso. Alzar objetos de masa diferente nos supone aplicar fuerzas diferentes durante el tiempo en que levantamos el objeto.

Cuando el objeto cae, no debemos aplicar ninguna fuerza para moverlo, lo hace la Tierra. La razón de la caída es la fuerza de atracción de la Tierra. La velocidad con la que llega al suelo *cualquier* cuerpo desde una altura *h* es la misma para todos los cuerpos, si se produce en caída libre (ecuación (150) del subapartado 2.4.4):

$$v = \sqrt{2gh} \tag{179}$$

Vemos que las relaciones cinemáticas (178) y (179) proporcionan relaciones entre variables geométricas (altura) y cinemáticas (tiempo, velocidad, aceleración de la gravedad). Pero con estas relaciones no podemos explicar el hecho de que el cuerpo que cae produzca un efecto diferente según su masa, porque la masa no interviene.

¿Qué no hemos considerado aún para tener en cuenta la diferencia que sabemos que hay en la dinámica de cuerpos diferentes y en los efectos que producen sobre terceros cuerpos?

Nos podemos plantear diversas cuestiones, a la vista de las consideraciones anteriores:

a) ¿Por qué no aparece en las expresiones (178) y (179) la masa o el peso de los objetos que caen?

b) ¿Qué significa "caída libre"? ¿Qué otros tipos de caídas hay?

c) Si recogemos el lápiz o el libro caído al suelo, el esfuerzo (la fuerza) que hacemos es diferente. ¿En qué se traduce este esfuerzo, respecto al objeto que levantamos?

d) Aunque la fuerza que utilizamos para levantar un objeto es siempre igual a su peso, si los objetos caen desde una altura menor, el efecto que causan (sobre el pie, por ejemplo) es menor. ¿Por qué?

e) Asimismo, en el caso anterior, una vez que los objetos están en el suelo, la fuerza que utilizamos para lenvantarlos es la misma que cuando caen desde mayor altura. ¿No hay aquí una contradicción?

Cerraremos este apartado dejando las cuestiones anteriores abiertas. Las contestaremos en apartados posteriores, cuando comencemos a cuantificar los efectos de las fuerzas sobre los cuerpos, y cuando introduzcamos otros conceptos como los relacionados con el trabajo y la energía que entran en juego en los procesos mencionados.

3.5.1. ¿Qué hemos aprendido?

- El análisis del movimiento de caída libre nos muestra que, para comprender los efectos de este movimiento, no basta con conocer el tiempo de caída libre o la velocidad con la que un objeto llega al suelo.

- Comenzamos a estudiar los movimientos fijándonos únicamente en la velocidad de la partícula y a continuación hablamos de aceleraciones, de fuerzas, de leyes básicas de la mecánica, etc.

- La descripción de procesos y fenómenos de interés que habitualmente son complicados requiere que introduzcamos conceptos cada vez más sofisticados.

3.6. Recapitulación

Hemos introducido el concepto de sistema de referencia inercial y lo hemos definido como aquel que se mueve a velocidad uniforme y constante.

- La velocidad de un objeto es una magnitud relativa, que toma valores diferentes cuando se observa desde sistemas de referencia inerciales diferentes.

- La aceleración del objeto, en cambio, es la misma cuando se mide desde sistemas inerciales diferentes. La aceleración de un objeto es una magnitud absoluta, independiente del sistema de referencia inercial desde el cual se mide.

Una fuerza es cualquier acción que provoca un cambio en el estado de movimiento de una partícula.

- El efecto que ejercen las fuerzas depende de la dirección en la que se apliquen.
- Las fuerzas actúan por pares (acción y reacción).

La masa de un objeto es una medida de su inercia, es decir, de la dificultad que implica cambiar su estado de movimiento. La masa influye en la fuerza que aplicamos para desplazar o detener objetos.

Los efectos que ejercen unos objetos sobre otros dependen de diversos factores: velocidades relativas, distancia que los separa, masa, etc.

3.7. Problemas de ampliación

Problema 3.1. Velocidades típicas

Recordemos el problema 2.1 del apartado 2:

- Un vehículo, que va a una velocidad de 72 km/h, es decir, a 20 m/s.
- Una persona, que corre a menos de 10 m/s.
- La Tierra, que se mueve a unos 30 km/s alrededor del Sol, que está a unos $1{,}5 \times 10^8$ km.

¿En cuál de los tres casos podemos definir un sistema de referencia inercial solidario al objeto que se mueve?

Problema 3.2. Fricción

Explicad por qué en el comentario de las figuras 53 y 54 (al comentar la actividad 3.2) hemos dicho que a veces observaremos que un objeto (como un papel, en lugar de una piedra) se verá frenado si lo dejamos caer desde un vehículo en movimiento, aunque suponemos que no hace viento. ¿Cómo se observa el movimiento de caída de este objeto desde el tren y desde la estación?

4. Leyes de Newton de la dinámica

En los apartados 1 y 2 hemos estudiado la **cinemática**, la parte de la mecánica que analiza y describe los movimientos de los objetos sin preocuparse de las causas de estos movimientos.

La **dinámica** es la parte de la mecánica que estudia las causas que producen los movimientos y la relación entre las causas y los efectos que se observan. Hemos comenzado a estudiar cualitativamente la dinámica en el apartado 3, y en este apartado formalizaremos los conceptos necesarios y las relaciones que se establecen entre ellos: leyes y fórmulas que relacionan magnitudes físicas. Enunciaremos las tres leyes básicas de la dinámica, las tres leyes de Newton.

Introducción

En el apartado anterior hemos discutido algunas situaciones dinámicas que resultan de la aplicación de fuerzas. En este apartado introduciremos las leyes que determinan el movimiento de los cuerpos. Esto nos llevará a definir de manera precisa términos como *fuerza* y *masa*, que en la vida diaria se utilizan de manera informal y, a veces, metafórica. Así, daremos a los términos *fuerza*, *masa*, *energía*, *trabajo*, etc., un significado técnico muy preciso y concreto. Se trata de cambios semánticos (cambios en el significado) que sólo interiorizaremos adecuadamente si empleamos los conceptos en contextos variados y de dificultad creciente.

De cada concepto daremos una definición operativa, que nos permitirá ver su significado y la manera en que se podría determinar o medir. Porque la física, aparte de tratar de describir el mundo físico que nos rodea, introduce magnitudes **mensurables** e investiga las leyes que las relacionan entre ellas.

¿Qué aprenderemos?

- Ya hemos discutido cualitativamente en el apartado 3 las tres leyes de la diámica, relacionadas con la inercia, la acción de las fuerzas y la existencia de pares de fuerzas de acción y reacción.

- En este apartado aprenderemos a enunciar y a aplicar las tres leyes de Newton de la dinámica, que nos permitirán resolver problemas complejos de dinámica de partículas.

¿Qué supondremos?

Además de tener presente la cinemática y las ideas cualitativas de dinámica que han aparecido en el apartado anterior, sólo necesitamos nociones básicas sobre cálculo vectorial e integrodiferencial.

4.1. Ley de la inercia, o primera ley de Newton

Como ya hemos visto en los subapartados 3.2 y 3.3, estamos acostumbrados a ver que los objetos que están en movimiento acaban deteniéndose si no se hace nada: si lanzamos una pelota, acaba cayendo al suelo y rueda hasta que se detiene; un vehículo se frena si no pisamos el acelerador de manera constante. En ambos casos, la fuerza de rozamiento con el suelo, de la pelota o de las ruedas del coche, detendrán la pelota o el vehículo.

También vemos constantemente objetos en reposo, que no se mueven si no se actúa sobre ellos: una piedra en el camino, un libro encima de la mesa, una bola de billar, etc., no se mueven si no los golpeamos o los cogemos.

En conclusión, para detener objetos son necesarias acciones, que denominamos *fuerzas*, y hacen falta fuerzas para mover objetos.

El lenguaje científico pretende ser preciso e inequívoco. Por lo tanto, mientras que en la vida diaria decimos que una acción, como un golpe con la mano, un desnivel, etc., han causado un movimiento, cuando hablamos en términos científicos sólo utilizaremos el término *fuerzas*.

Una **definición cualitativa de fuerza** es, pues, la siguiente.

> Una **fuerza** es cualquier acción, ejercida desde el exterior de un cuerpo, que modifica su velocidad o su estado de reposo (ausencia de velocidad).

Analicemos esta definición.

Actividad 4.1. Definición cualitativa de fuerza

Explicad por qué la definición de fuerza anterior es aplicable a los ejemplos mencionados en este subapartado (piedra, bola, libro, etc.) e indicad en cada caso quién o qué hace las fuerzas que actúan.

Solución

Cuando levantamos una piedra, cuando golpeamos una bola de billar, cuando un libro cae de la mesa al suelo, etc., estamos modificando la velocidad del cuerpo. En los ejemplos anteriores, la velocidad pasa de un valor nulo a un valor no nulo.

También aplicamos una fuerza si aceleramos un coche o si golpeamos un columpio para que vaya más de prisa.

Las fuerzas que actúan en los ejemplos anteriores son la gravedad terrestre, la fuerza que hacemos con las manos, la fuerza de impacto del taco de billar, etc.

Por lo tanto, las fuerzas provocan cambios en el estado de reposo o de movimiento, es decir, las fuerzas provocan aceleraciones.

Imaginad ahora que viajáis en un vehículo (un tren, un avión, un coche) que se mueve a velocidad constante y en línea recta. Ya sabemos que cuando hablamos de velocidad constante significa que el vector velocidad es constante: no cambia ni su módulo ni su dirección ni su sentido; es decir, nos movemos en línea recta y a tantos m/s, invariables. Si el vehículo frena o acelera, incluso si sólo cambia de dirección, nuestros cuerpos (y los objetos situados dentro del vehículo) lo notan. Según lo que hemos dicho, es como si hubiera alguna fuerza que, cuando un vehículo arranca desde la situación de reposo, o cuando toma una curva, o cuando acelera bruscamente, empuje nuestro cuerpo contra el asiento delantero o trasero, o contra la puerta del vehículo.

Actividad 4.2. Aceleraciones bruscas

Explicad qué ocurre si:

a) El coche en el que viajáis toma una curva bruscamente.

b) Vais de pie en un autobús que frena de repente.

c) El coche en el que viajáis va a velocidad constante por una carretera recta y lisa y, de repente, hay una fuerte bajada (un cambio de rasante brusco).

Solución

a) Nos damos un golpe contra el lateral del coche, o contra la persona a la que tenemos al lado. Notamos que nos movemos en sentido contrario a la curva, hacia el exterior de la curva.

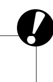
b) Nos vemos impulsados hacia adelante, en el sentido de la marcha del autobús.

c) Notamos que el cuerpo se eleva, como si el estómago se nos subiese hacia arriba.

Las observaciones de la actividad anterior y los ejemplos que hemos visto antes son consecuencia de una ley general de la dinámica que denominamos **ley de la inercia** o **primera ley de Newton**, que enunciamos a continuación.

> Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento uniforme y en línea recta, si sobre el cuerpo no actúa ninguna fuerza.

Ya comentamos en el subapartado 3.1 que el estado de reposo y el de movimiento rectilíneo y uniforme son indistinguibles, es decir, son equivalentes en cuanto a los fenómenos que observamos en la naturaleza.



El concepto de *inercia* se ve en el subapartado 3.3 de este módulo didáctico.

La ley de la inercia es, por lo tanto, una declaración del hecho de que los estados de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme son estados naturales de los objetos, y que son necesarias interacciones con otros objetos para producir *cambios* en este movimiento.

De esta manera, el estado de reposo, o de velocidad nula, es equivalente al estado de velocidad constante. Observad que al decir velocidad nos estamos refiriendo siempre al vector velocidad.

La ley de la inercia nos permite sacar conclusiones acerca de la existencia de fuerzas cuando observamos un movimiento concreto. Vamos a ver un ejemplo.

Actividad 4.3. La ley de inercia y la Luna

Apicad la ley de inercia al movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. ¿A qué conclusión llegáis?

Solución

La Luna recorre una órbita aproximadamente circular alrededor de la Tierra. La velocidad de la Luna es, en cada punto, tangente a la trayectoria de la Luna, como muestra la figura 66; por lo tanto, la Luna está sometida a una fuerza en todo instante, porque no se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme en ningún momento.

Figura 66

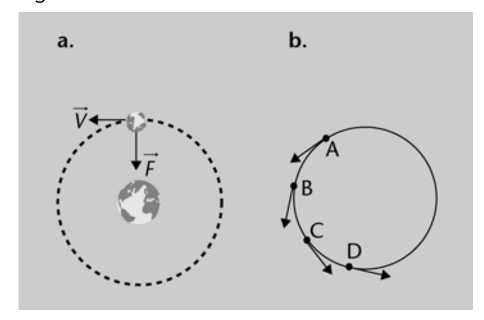


Figura 66

La Luna recorre una órbita (una trayectoria) casi circular alrededor de la Tierra.

a. Velocidad instantánea de la Luna y fuerza que la mantiene en órbita en un punto de la órbita.

b. Vector velocidad en algunos puntos de la órbita.

Observemos los vectores velocidad en los puntos B y C de la trayectoria de la Luna (figura 66). ¿Qué tipo de fuerza convierte un movimiento en la dirección B en un movimiento en la dirección C un instante después? Debe ser alguna fuerza que actúe en dirección al punto central de la circunferencia, la que provoque esta variación constante de la dirección de movimiento. Esta fuerza es la de atracción de la Tierra.

Vimos en la actividad 2.12 que, en un movimiento circular, la aceleración es centrípeta. Por lo tanto, tendrá la dirección de la fuerza (figura 66a).

Otra manera de interpretar la **primera ley de Newton** es diciendo que nos da una **definición cualitativa de *fuerza*** como la que damos a continuación.

Una fuerza es cualquier actuación que permite alterar la velocidad de una partícula.

Una fuerza es la acción ejercida por un agente externo al cuerpo que está en reposo o en movimiento (en un movimiento cualquiera, acelerado o no) y que le provoca un *cambio* de velocidad. Decimos *cambio* en el sentido más amplio, que incluye una modificación del vector velocidad en términos de módulo, dirección o sentido.

Decimos que la definición es *cualitativa* porque no nos permite medir fuerzas, sino únicamente detectar su existencia. Veremos en el subapartado siguiente que con la segunda ley de Newton podremos construir una definición operativa de fuerza, que nos permitirá trabajar cuantitativamente con éstas.

Vamos a analizar ahora el efecto de diversas fuerzas que actúan simultáneamente sobre el cuerpo.

Actividad 4.4. Aplicación del primer principio de la dinámica

Sabéis que si os tiráis por un tobogán, vais bajando por él cada vez con mayor rapidez: es un movimiento acelerado.

Pero también puede ser que hayáis observado que a veces una persona se tira por el tobogán y al cabo de unos instantes de estar cayendo continúa el movimiento con una velocidad que parece constante.

Analizad ambos casos a la luz de la primera ley de Newton.

Solución

Al deslizarnos por un tobogán la fuerza de la gravedad es la que nos hace caer. Como esta fuerza actúa constantemente, el movimiento es cada vez más rápido: se trata de un movimiento acelerado. Según el principio de inercia, las fuerzas provocan cambios en el estado de movimiento.

Pero no es esta fuerza la única que actúa, porque también hay fuerzas de fricción entre nuestro cuerpo y la superficie del tobogán. Hay veces que nos lanzamos y no caemos: la fuerza de fricción, la reacción del tobogán que nos sostiene y nuestro peso se compensan (dan una fuerza resultante nula) y, como no actúa ninguna fuerza total, entonces nuestro cuerpo no se acelera: si estaba en reposo, continúa en reposo.

También puede ocurrir que comencemos a caer y mientras estamos moviéndonos se produzca una cancelación de fuerzas (fricción, reacción del tobogán y peso) y entonces se mantiene la velocidad constante de caída porque no actúa ninguna fuerza que acelere el movimiento de caída. De acuerdo con el principio de inercia, si no actúa una fuerza, no se modifica el estado de movimiento (rectilíneo y uniforme) del cuerpo.

En los dos ejemplos vemos que, de acuerdo con el primer principio, el estado de movimiento rectilíneo y uniforme, o el estado de reposo, son estados en los que no actúa ninguna fuerza que los altere. Observemos que lo que importa es la fuerza total, o fuerza neta: una fuerza nula puede ser el resultado de sumar diversas fuerzas.

Sin embargo, no toda fuerza aplicada produce movimiento: pensemos en una estantería llena de libros. Si un niño la empuja, la estantería probablemente no se moverá. La “intensidad” de la fuerza aplicada es, por lo tanto, importante (en este ejemplo, la fuerza total que actúa sobre la estantería es la resultante de la fuerza aplicada externamente y la fuerza de fricción del suelo. Si la resultante es nula, no hay movimiento).

Otra situación se da cuando tenemos un libro encima de una mesa. Si lo empujamos contra la mesa, éste no se moverá (a no ser que se rompa la mesa). Si lo empujamos en una dirección paralela a la mesa, podemos moverlo, y se moverá en la dirección en la que ejercemos la fuerza. La dirección de la fuerza aplicada es, por lo tanto, importante.

Las dos conclusiones anteriores (sobre la importancia de la intensidad y la dirección de las fuerzas aplicadas) nos indican que la magnitud *fuerza* es una magnitud vectorial, como ya habíamos intuido en los ejemplos del cuadro que cuelga de la pared, del gimnasta y de la barca de las actividades 3.10 y 3.11.

4.1.1. ¿Qué hemos aprendido?

- El "estado natural" de un cuerpo es el reposo o el movimiento rectilíneo y uniforme.

- Si aplicamos una fuerza a un cuerpo, su estado de movimiento o de reposo del cuerpo se altera. Es decir, una fuerza acelera un cuerpo al cambiar su velocidad.

- Las fuerzas son magnitudes vectoriales.

El subapartado siguiente aborda dos puntos clave de la mecánica newtoniana: cómo se pueden medir fuerzas y cómo se relacionan las fuerzas con los cambios que producen en los movimientos de los cuerpos.

4.2. Segunda ley de Newton

Todos tenemos la experiencia que si agarramos una persona de la mano, y tiramos de ella con fuerza hacia nosotros, la persona se nos acerca; si tiramos de ella con más fuerza, el efecto es mayor. Podríamos decir que tirones y cambios de velocidades (aceleraciones) están relacionadas.

Como no tenemos la opción de hacer un experimento en el laboratorio para llegar al concepto cuantitativo de fuerza, plantearemos un **experimento mental** (o, como le gustaba decir a Einstein en alemán, un *Gedankenexperiment*).

Experimentos

Hoy en día tenemos otras opciones: podemos ver simulaciones por ordenador como las que comentamos en el apartado 1. Un ejemplo de simulación referida a la segunda ley de Newton es ésta: http://www.tutorvista.com/content/physics/physics-i/newtons-laws-motion/animation-newtons-second-law.php

Hagamos un experimento mental como el de la figura 67: un objeto B puede deslizarse sobre un plano de inclinación variable y está ligado a otro cuerpo, A, que se mueve sobre un plano horizontal. El ángulo α que forma el plano inclinado puede variar. Los dos objetos se mueven sin fricción (imaginemos que las superficies están bien pulidas y engrasadas, o que son de hielo).

Figura 67

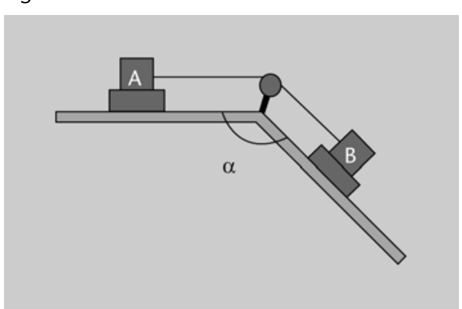


Figura 67

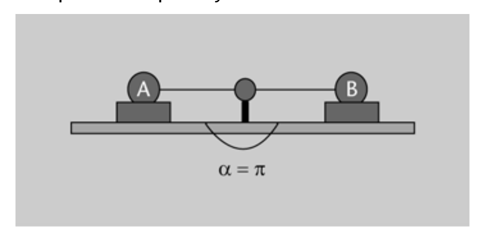
Un objeto B cae por una pendiente y arrastra al objeto A. Las superficies sobre las que descansan A y B no tienen rozamiento.

Si el ángulo α es de 180° (figura 68), las superficies en que descansan A y B son planas y ambos objetos estarán en reposo.

Recordad

180° es igual a π radianes.

Figura 68. Los objetos A y B no se mueven si la superficie es plana y horizontal



Pero si fijamos un ángulo en el intervalo $\pi/2 < \alpha < \pi$ y colocamos los objetos, el cuerpo B comenzará a caer y esto hará que el cuerpo A también se mueva. Una ráfaga de fotos disparada a A (diversas fotos en una fracción de segundo) nos daría un resultado como el de la figura 69.

Figura 69

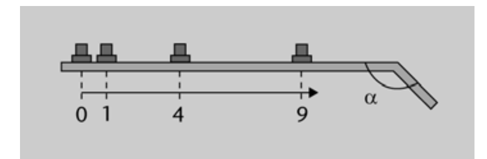


Figura 69

Cuatro instantáneas de la posición de A para tres incrementos iguales de tiempo, Δt.
B arrastra el objeto A en un movimiento acelerado.

Si no hay fricción, la caída de B será del tipo "caída libre". En efecto, podríamos comprobar (por ejemplo, disparando otra ráfaga de fotos) que las posiciones de B para incrementos constantes de tiempo siguen una relación del tipo de la ley de movimiento en caída libre, ecuación (147) del apartado 2:

$$\Delta l \propto (\Delta t)^2 \qquad (180)$$

donde Δl es la distancia recorrida por B durante el tiempo Δt. El desplazamiento del cuerpo A seguirá la misma relación que el cuerpo B.

A partir de los datos experimentales del desplazamiento en función del tiempo transcurrido, $\Delta l(\Delta t)$, podríamos deducir la aceleración a del cuerpo B. Sólo deberíamos ajustar los datos a la expresión (146) del apartado 2, bien conocida por nosotros:

$$\Delta l = \frac{1}{2} a \left(\Delta t\right)^2 \qquad (181)$$

Recordad

Cuando escribimos $\Delta l(\Delta t)$ significa que el desplazamiento Δl es función del tiempo transcurrido, Δt.

Como el objeto de A está unido por un hilo al cuerpo B, A también se desplaza por la superficie horizontal con la misma aceleración constante que B.

Entre los ángulos $\alpha = \pi$ y $\alpha = \pi/2$ la aceleración de los cuerpos A y B aumentará desde el valor $a = 0$ para $\alpha = \pi$ hasta un valor máximo, $a = g$, para $\alpha = \pi/2$. Si $\alpha = \pi/2$ el cuerpo B cae en caída libre y con la máxima aceleración, g, sin ser afectado por el plano inclinado. Como hemos dicho, este hecho experimental podría comprobarse con una cámara que dispare una ráfaga de fotos. En definitiva, tenemos un valor de la aceleración del cuerpo A para cada ángulo α del plano inclinado.

Además de la aceleración de los dos objetos en el experimento anterior, debemos medir las fuerzas que actúan. Vamos a ver cómo podemos hacerlo.

4.2.1. Medidor de fuerzas

Ahora sofisticaremos un poco el experimento y construiremos mentalmente un medidor de fuerzas, mediante un muelle elástico que situaremos entre A y B (véase la figura 70).

Figura 70

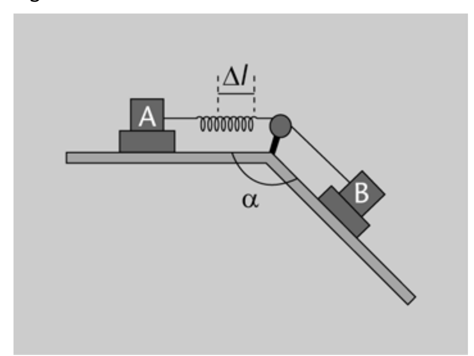


Figura 70

Agregamos un muelle al hilo que une los dos cuerpos, que permitirá medir la fuerza que B ejerce sobre A.

Podríamos comprobar experimentalmente que para cada ángulo α hay un alargamiento diferente del muelle (todos tenemos la experiencia de que si aplicamos una fuerza sobre un muelle podemos estirarlo, y cuanto mayor es esa fuerza, el alargamiento es mayor). Con una ráfaga de fotografías podríamos comprobar también que el alargamiento del muelle es constante durante el movimiento que se produce para cada ángulo del plano inclinado.

Por lo tanto, podemos asociar un valor de la fuerza que ejerce B a cada valor del alargamiento del muelle, y determinar así qué fuerza ejerce B sobre A para cada ángulo. Por el momento, daremos la fuerza en unidades arbitrarias, es decir: construiremos una escala 0,1, 2, etc., sobre el muelle, de manera que el valor 0 corresponda a la posición del extremo del muelle cuando $\alpha = \pi$, y mediremos qué punto de la escala alcanza el muelle estirado para cada valor del ángulo del plano inclinado. Podemos construir una tabla de valores experimentales de fuerza y de aceleración para cada ángulo, porque la fuerza y la aceleración pueden medirse independientemente (la fuerza, a partir del alargamiento del muelle, y la aceleración, a partir de la ráfaga de fotos).

Relación funcional

Si aplicamos una fuerza a un muelle, éste se estira o se contrae. Debe haber alguna función que describa esta relación, de la que sólo podemos intuir que va a ser monótona creciente: al incrementar la fuerza aplicada, el muelle se alarga más.

Observad que no hemos propuesto ninguna hipótesis sobre qué relación funcional existe entre la fuerza aplicada y el alargamiento del muelle. Ya vais a ver en el apartado 6 que en algunos casos esta relación es sencilla, pero para el experimento que nos ocupa no es necesario investigarla. Podemos continuar la discusión del experimento sin conocer la relación que liga fuerzas y alargamientos o compresiones en un muelle elástico.

4.2.2. La masa de un objeto

Ahora cambiamos el objeto A por otro parecido, pero más grande o más pequeño. Repetimos los experimentos y representamos en una gráfica fuerza-aceleración la relación que existe para cada ángulo entre las fuerzas que indica el medidor (el alargamiento del muelle) y la aceleración que observamos en el objeto (por medio de la ráfaga de fotos). Si lo hacemos para objetos diferentes, obtendremos una gráfica como la de la figura 71.

Figura 71

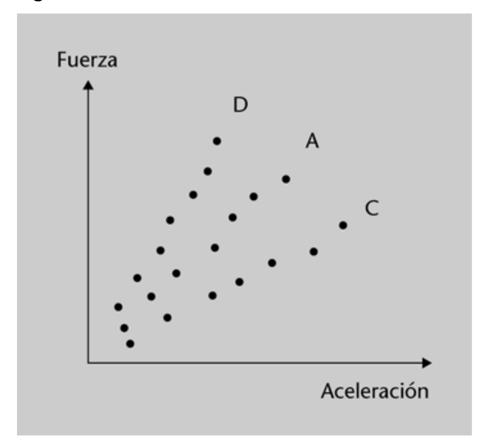


Figura 71

Resultados de los experimentos de medida de fuerzas y de aceleraciones para tres cuerpos diferentes, A, C y D (cada medida de fuerza y de aceleración; es decir, cada punto de la gráfica, corresponde a un ángulo α determinado).

Como los puntos correspondientes a cada cuerpo en la figura 71 están bastante alineados, puede hacerse pasar una recta por la secuencia de puntos que corresponde al movimiento de cada objeto (véase la figura 72).

Figura 72

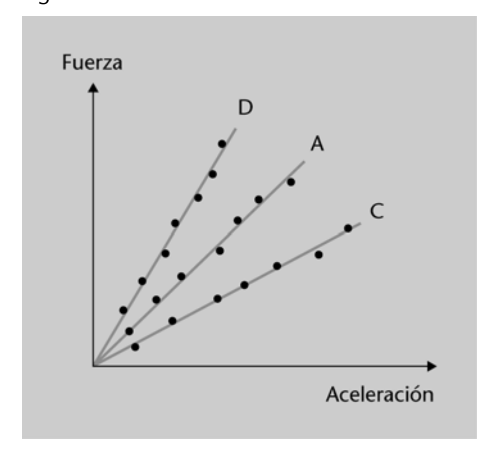


Figura 72

Hacemos pasar las líneas rectas que mejor se ajustan a los resultados de la figura 71.

¿Qué significa este resultado que hemos obtenido de los experimentos de medida de fuerzas aplicadas y de aceleraciones producidas por diversos cuerpos? Nos damos cuenta de dos hechos:

1) La relación entre fuerza y aceleración es lineal, es decir, ambas magnitudes son proporcionales.

2) La pendiente de las rectas es diferente para cada objeto.

Empecemos por el segundo hecho. Si nos fijamos en el valor de una fuerza cualquiera y trazamos una raya horizontal (figura 73), observamos que para una misma fuerza el objeto D se acelera menos que el objeto A, y éste menos que el objeto C. Diremos que C tiene menos inercia que A y que A tiene menos inercia que D.

Figura 73

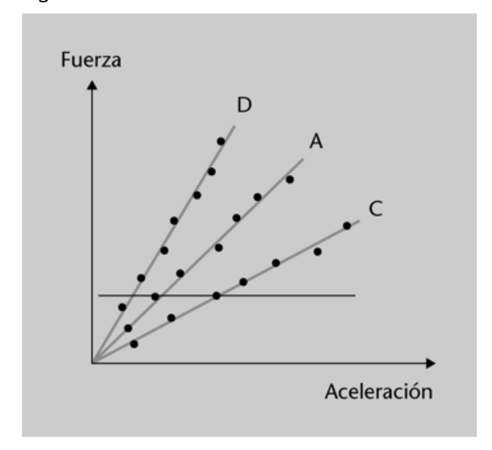


Figura 73

Se ha marcado para los datos de la figura 72 un valor cualquiera de la fuerza con una raya horizontal. El cuerpo D se acelera menos (tiene más inercia) que el A y éste, que el C.

El primer hecho, que las fuerzas aplicadas resultan ser directamente proporcionales a las aceleraciones que adquieren los objetos, es una ley de la naturaleza. La constante de proporcionalidad es un valor único para cada objeto, una "propiedad" de cada objeto.

En conclusión, cuando aplicamos diversas fuerzas, F, a un cuerpo que se acelera, a, por la aplicación de estas fuerzas, se encuentra el hecho experimental de que F es proporcional a a, $F \propto a$. Si simbolizamos con m la constante de proporcionalidad que relaciona las fuerzas aplicadas a un cuerpo y las aceleraciones que éstas provocan, podemos escribir la **relación fuerza-aceleración**:

$$F = ma \tag{182}$$

La propiedad del cuerpo que se acelera, m, es la pendiente de la línea recta correspondiente a cada cuerpo en la figura 72. Denominamos esta propiedad *masa inercial*, o simplemente, *masa*, por abreviar.

Esta ley, la **segunda ley de Newton**, se enuncia de la manera siguiente: si sobre una partícula de masa m actúa una fuerza F, ésta le comunica una aceleración que viene dada por el cociente de la fuerza por la masa.

Masa *m*

Utilizamos *único* para indicar que la masa es una magnitud escalar y que es una propiedad de cada objeto concreto. Aun así, objetos diferentes en forma, color, textura, etc., pueden tener valores idénticos de m.

Mientras que la escala de fuerzas del experimento mental anterior era arbitraria, la existencia de este número único para un cuerpo determinado *no* es un asunto de definición o de convenio y no puede deducirse a partir de principios teóricos: es un hecho físico experimental, una ley de la naturaleza, que denominamos *segunda ley de Newton*. Newton llegó a la conclusión anterior por conjetura, y no por pruebas experimentales directas, pero se dio cuenta de su

carácter de ley básica del movimiento, y por eso lo denominamos *segunda ley de Newton de la dinámica*.

La masa, igual que la longitud y el tiempo, es una de las siete unidades fundamentales del Sistema Internacional. La unidad de masa inercial se denomina kilogramo, se simboliza por kg y corresponde (por convenio internacional) a la masa de una pieza patrón determinada conservada en París.

En la expresión (182) puede verse que la fuerza es una magnitud derivada. La unidad de fuerza es el newton y se representa con la letra N.

Actividad 4.5. Un newton

¿Cómo se define la unidad de fuerza, el newton, a partir de unidades fundamentales del SI? (Ayuda: emplead la ecuación (182)).

Solución

Si damos el valor unidad a cada magnitud de la ecuación (182), obtenemos la expresión de la unidad de fuerza, el newton, a partir de las unidades fundamentales:

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\ 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad (183)$$

Es decir, 1 newton (1 N) es la fuerza que, aplicada a una masa de 1 kg, le comunica una aceleración de 1 m/s^2.

Alguno podría preguntarse si no es cierto que, de la misma manera que un cuerpo tiene una masa determinada, *todas* las propiedades que tienen los objetos son únicas. No es así: un objeto concreto de masa inercial m (por ejemplo, un trozo de madera, una goma elástica o un vaso de agua) puede tener muchos estados de carga eléctrica, muchos colores diferentes o muchas formas, pero sólo *un* valor de la masa.

Con la segunda ley de Newton podemos relacionar la velocidad y la posición de la partícula con las fuerzas que actúan, por medio de la aceleración que provocan. Este es el objetivo principal de la dinámica.

Actividad 4.6. Segunda ley de Newton en forma de ecuación diferencial: leyes del movimiento

Teniendo en cuenta que las magnitudes fuerza y aceleración son magnitudes vectoriales, escribid la segunda ley en forma de ecuación vectorial y explicitad también la definición de aceleración para obtener una ecuación diferencial. Escribid las tres ecuaciones que obtengáis para las componentes de los vectores.

Solución

En general, como fuerzas y aceleraciones son magnitudes vectoriales, podemos escribir la **segunda ley de Newton en forma vectorial**:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (184)$$

o bien, componente a componente:

$$F_x = ma_x,\ F_y = ma_y,\ F_z = ma_z \qquad (185)$$

Sobre una partícula pueden actuar diversas fuerzas a la vez. En las expresiones anteriores se debe utilizar la **fuerza neta** o **resultante**.

La fuerza neta o fuerza resultante es la que acelera una masa.

La segunda ley de Newton también puede escribirse en términos de la velocidad de la partícula, si explicitamos la definición de aceleración en la relación (184), $\vec{a} = d\vec{v}/dt$:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{186}$$

O, si empleamos la relación entre la aceleración y el vector de posición, $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{187}$$

De la misma manera que hemos escrito las relaciones (185) a partir de la (184), las relaciones (186) o (187), como toda expresión vectorial, equivalen a tres ecuaciones, cuando las escribimos componente a componente. Por ejemplo, la (187) sería:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \tag{188}$$

Se trata de ecuaciones diferenciales cuando conocemos las fuerzas y buscamos las coordenadas de la trayectoria de la partícula, porque aparecen bajo el signo de derivación.

Las relaciones (186) o (187) indican que, si conocemos las fuerzas que actúan sobre un sistema, la resolución de las ecuaciones diferenciales anteriores nos permite obtener la ley de movimiento $\vec{r} = \vec{r}(t)$ y también la velocidad de la partícula en todo momento.

Recordemos, para finalizar el subapartado, el proceso que nos ha llevado a enunciar la segunda ley de Newton. Empezando por fuerzas y aceleraciones (dos magnitudes mensurables experimentalmente) hemos definido la magnitud *masa*, que es una medida de la inercia de los cuerpos, es decir, de la tendencia que tiene un cuerpo a permanecer en el estado de movimiento rectilíneo y uniforme (o de reposo) en el que se encuentra. La inercia es también una medida de la dificultad que presenta un objeto para detenerlo cuando está en movimiento (porque es necesario aplicar una fuerza para frenarlo, es decir, desacelerarlo).

4.2.3. ¿Qué hemos aprendido?

- Hemos planteado la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, como resultado de un experimento mental que podría reproducirse fácilmente en un laboratorio de física.

- También habría sido un procedimiento válido postular esta ley y verificar su validez comprobando que sus consecuencias son corroborables experimentalmente.

- La segunda ley de Newton permite definir cuantitativamente el concepto de fuerza, una vez se ha fijado por convenio la unidad de masa.

- Si sobre un cuerpo actúan diversas fuerzas, el efecto de éstas es el mismo que el de una sola fuerza, la fuerza resultante o fuerza neta.

- La existencia de una única masa inercial asociada a cada objeto, y que indica la aceleración que adquirirá si le aplicamos una fuerza, es una propiedad básica de la naturaleza.

Ya hemos formulado la primera y la segunda ley de Newton. Antes de enunciar la tercera ley de Newton, vamos a analizar algunas consecuencias que se derivan del análisis de lo que expresa la segunda ley. Empezaremos por explicitar una propiedad de las magnitudes vectoriales, que permite analizar de manera más sencilla los problemas en los que intervienen: su carácter lineal.

4.3. Superposición de masas y de fuerzas

El paso de la ecuación (182), $F = ma$, a la expresión vectorial (184) no es un paso "natural" u obvio. Es el resultado de experimentos que permiten comprobar que el principio de superposición de fuerzas no es sólo una conjetura, sino que es la manera como se comporta la naturaleza. El principio de superposición nos permite utilizar el álgebra vectorial en los problemas de mecánica. Este hecho justifica que estudiéis álgebra lineal en matemáticas. Los problemas "no lineales", cuando están presentes, son mucho más difíciles de tratar matemáticamente, porque no se cumple el principio de superposición.

El **principio de superposición de las fuerzas** afirma que el efecto de un conjunto de fuerzas es el mismo que el efecto que ejerce la fuerza resultante.

En efecto, si aplicamos dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ a un objeto de masa m, la aceleración resultante de esta masa es la suma de las aceleraciones que le provocaría cada fuerza por separado, $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Vamos a verlo. Según la segunda ley de Newton, la aceleración que provoca la fuerza total $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ es:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m} \tag{189}$$

y si ahora separamos la suma en dos fracciones, y tenemos en cuenta que la segunda ley también se aplica a cada fuerza por separado, obtenemos:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \tag{190}$$

El principio de superposición de fuerzas establece también que, si dos objetos de masa m_1 i m_2 tienen la misma aceleración, la fuerza que provocaría esta misma aceleración a un objeto de masa $m_1 + m_2$ es la suma de las fuerzas que actúan sobre cada objeto.

El procedimiento para demostrarlo es parecido al anterior. La fuerza que comunica una aceleración $\vec{a}$ a la masa total:

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a} \tag{191}$$

es igual a la suma de las fuerzas que provoca la aceleración $\vec{a}$ a las dos masas por separado:

$$\vec{F} = m_1\vec{a} + m_2\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{192}$$

En resumen, el principio de superposición expresa que el efecto de la suma es igual a la suma de los efectos.

Esto vale tanto para las fuerzas, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, como para las masas o las aceleraciones. El principio de superposición vale también para cualquier otra magnitud vectorial que aparezca en este curso, como la velocidad, el momento lineal, el campo gravitatorio o el eléctrico, etc.

El principio de superposición permite también "descomponer" una fuerza en sus componentes y analizar qué efecto provoca cada componente sobre el objeto. En particular, este principio es el que nos permite hablar de las tres componentes cartesianas de un vector, como la fuerza, y escribir el vector fuerza como la suma de los efectos que tiene cada componente actuando en una dirección diferente del espacio:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \tag{193}$$

La notación vectorial es, pues, bien compacta y potente: una sola ecuación vectorial representa tres ecuaciones escalares y, además, lleva implícito el cumplimiento del principio de superposición de las magnitudes involucradas.

Vamos a repasar a continuación las ideas básicas del álgebra de vectores.

En una primera lectura de este apartado podéis pasar directamente al subapartado 4.4, y continuar trabajando los aspectos conceptuales de la segunda ley de Newton, y ver a continuación la discusión de la tercera ley de Newton. En una nueva lectura de este apartado podéis realizar las actividades siguientes, que son importantes desde el punto de vista práctico, pero no lo son tanto en términos conceptuales.

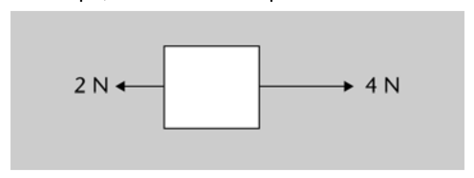
4.3.1. Suma de magnitudes vectoriales

En este subapartado vamos a hacer un repaso breve de conceptos elementales sobre la suma de magnitudes vectoriales. En particular, vamos a recordar como se realiza la suma de fuerzas, con tal de obtener la fuerza resultante.

Actividad 4.7. Suma de fuerzas

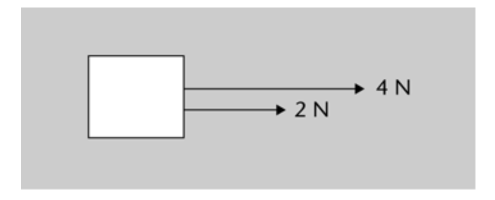
a) Si estiramos un objeto con una fuerza de 2 N hacia la izquierda y 4 N hacia la derecha (figura 74a), ¿cuál es la fuerza resultante, es decir, qué fuerza hace el mismo papel que la suma de las dos?

Figura 74a. Dos fuerzas que actúan sobre un cuerpo, en direcciones opuestas



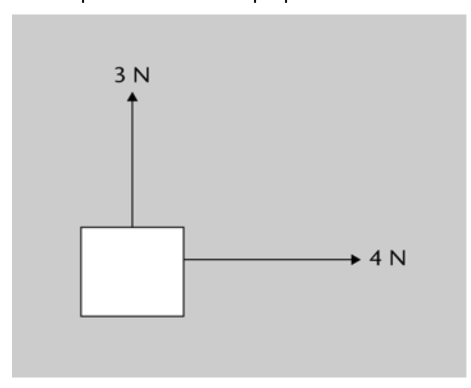
b) Calculad la resultante de las fuerzas indicadas en la figura 74b.

Figura 74b. Dos fuerzas que actúan sobre un cuerpo, en la misma dirección



c) Si dos fuerzas actúan en direcciones que forman un ángulo recto, como en la figura 74c, ¿cuál es la fuerza resultante?

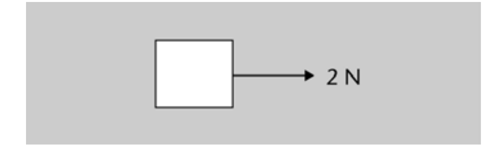
Figura 74c. Dos fuerzas que actúan sobre un cuerpo en direcciones perpendiculares



Solución

a) El par de fuerzas de la figura 74a equivale a una sola fuerza de 2 N que actúa hacia la derecha. Esta es la fuerza resultante de la suma de las fuerzas de la figura 74a:

Figura 74d. Resultante de las dos fuerzas de la figura 74a



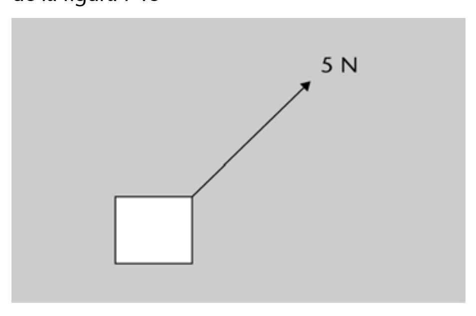
b) Fijaos en que la longitud de las flechas es indicativa de la magnitud de las fuerzas. La suma de las dos fuerzas de la figura 74b equivale a una fuerza de 6 N dirigida en el mismo sentido (figura 74e).

Figura 74e. Resultante de las dos fuerzas de la figura 74b



En el caso de la figura 74c, la fuerza resultante se muestra en la figura 74f.

Figura 74f. Resultante de las dos fuerzas de la figura 74c



¿Cómo obtenemos la resultante en el caso anterior, en el que las fuerzas que suman no tienen la misma dirección del espacio?

Los dos procedimientos alternativos que vamos a comentar ahora para sumar dos vectores valen para cualquier par de fuerzas que formen un ángulo determinado, no sólo para fuerzas perpendiculares como las del ejemplo 74c.

Gráficamente, la suma de dos fuerzas que tienen direcciones perpendiculares, como las fuerzas de la figura 74c, puede calcularse de dos maneras: la primera opción es cerrar el cuadrilátero con rectas paralelas a los dos vectores que se suman y trazar el vector que une el vértice de los vectores que se suman con el vértice común opuesto. Este es el vector suma.

Figura 74g

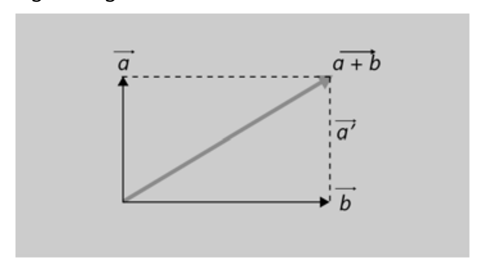


Figura 74g

Hacemos un rectángulo que tiene por lados los vectores $\vec{a}'$ y $\vec{b}$ que queremos sumar y unimos el vértice común de los vectores $\vec{a}'$ y $\vec{b}$ con el extremo opuesto del rectángulo.

También pueden sumarse las dos fuerzas perpendiculares si hacemos una copia de una de las fuerzas $\vec{a}$, por ejemplo, en el extremo de la otra, $\vec{a}'$, y unimos el origen del segundo vector con el extremo del que hemos copiado (figura 74h). Éste es el vector suma.

Figura 74h

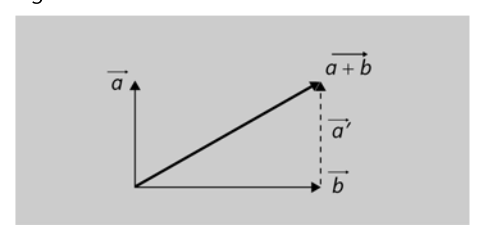


Figura 74h

Copiamos el vector $\vec{a}$ en el extremo del $\vec{b}$, vector $\vec{a}$, y unimos el origen del vector $\vec{b}$ con el extremo del vector $\vec{a}'$.

Analíticamente, si el triángulo es rectángulo, podemos emplear el teorema de Pitágoras para calcular el módulo del vector resultante. En el ejemplo anterior, si $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$:

$$|\vec{r}| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (194)$$

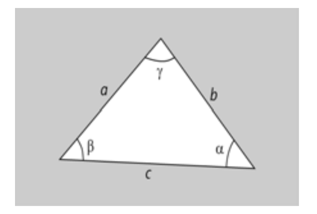
y para los valores de la figura 74c obtenemos:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(3\,\text{N})^2 + (4\,\text{N})^2} = 5\,\text{N}\,.$$

Cuando los vectores no forman ángulos rectos, pueden utilizarse relaciones trigonométricas para calcular la resultante (como el teorema del coseno). Los dos procedimientos gráficos mencionados en las figuras 74g y 74h son válidos también para vectores que no forman ángulos rectos, es decir, valen también para vectores en cualquier otra dirección: sólo es necesario formar el paralelepípedo correspondiente.

Teorema del coseno

El teorema del coseno afirma que en un rectángulo cualquiera:



$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$.

Una operación tan habitual como la de sumar vectores es la operación de descomponer el vector en dos que, sumados, den el vector original. A esta operación se la llama *proyectar* el vector en direcciones del espacio determinadas. Vamos a verlo.

4.3.2. Proyección (o descomposición) de un vector

La operación de sumar dos fuerzas da una fuerza resultante que provoca el mismo efecto que las fuerzas que sumamos. Si sumamos dos velocidades, por ejemplo, obtenemos la dirección de la velocidad resultante.

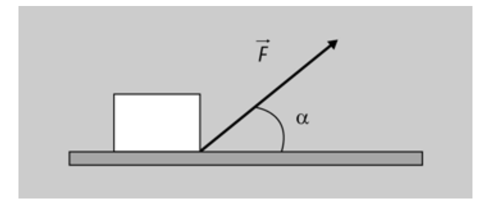
A veces conviene hacer la operación contraria: para analizar un movimiento conviene descomponer un vector en dos componentes y analizar por separado el efecto de cada una de las componentes. La operación anterior se denomina proyectar el vector en direcciones determinadas del espacio, o descomponer el vector en sus componentes.

Podemos escoger cualquier dirección del espacio para descomponer un vector, pero lo más habitual es elegir dos direcciones perpendiculares del espacio y calcular las componentes del vector en estas direcciones. Veamos unos ejemplos.

Actividad 4.8. Descomposición de fuerzas

A veces conviene descomponer una fuerza en dos componentes que formen unas direcciones determinadas. Por ejemplo, si un vehículo es arrastrado por una grúa que ejerce una fuerza F en una dirección que forma un ángulo α con respecto al suelo (figura 75) y queremos saber qué parte de la fuerza del cable de la grúa se utiliza para arrastrar el coche y qué parte se utiliza para elevar la parte delantera del vehículo, debéis descomponer la fuerza de la grúa en las componentes horizontal y vertical de la fuerza. Hacedlo.

Figura 75. Arrastramos un objeto con una fuerza F que forma un ángulo α respecto al suelo



Solución

Para esto podéis seguir el procedimiento inverso al de la suma de dos vectores de la figura 74g: trazamos dos rectas en el extremo del vector que queremos descomponer, una recta paralela al suelo y otra perpendicular al suelo; la proyección horizontal y vertical del vector son los dos vectores que, sumados, darían el vector original (figura 76), $\vec{F}_h$ y $\vec{F}_v$.

Figura 76

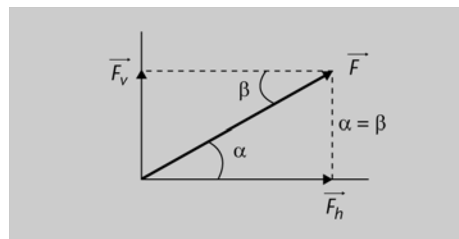


Figura 76

Descomposición de la fuerza de la figura 10 en dos componentes, horizontal y vertical.

En este caso hablamos de **proyecciones ortogonales**, porque los vectores en los que descomponemos el vector original son perpendiculares. Pero podemos utilizar direcciones no ortogonales para proyectar vectores, si nos interesa más en un problema concreto.

El cálculo del módulo de las proyecciones puede hacerse aplicando las propiedades de las funciones trigonométricas elementales. Como el ángulo β de la figura 76 es igual al α, por ser ángulos formados por dos rectas paralelas de dirección $\vec{F}_h$ y una recta que las corta, de dirección $\vec{F}$, podemos escribir:

$$F_h = F\cos\alpha \qquad (195)$$

$$F_v = F \text{ sen } \alpha \qquad (196)$$

La componente vertical de la fuerza eleva el coche y la componente horizontal es la que permite arrastrarlo.

Cuando se realiza un cálculo o se resuelve un problema es conveniente comprobar que lo que hemos obtenido tiene sentido. En el ejercicio anterior puede verse que si $\alpha = \pi/2$ las ecuaciones (195) y (196) dan $F_h = 0$ y $F_v = F$, y este resultado tiene sentido porque estaríamos hablando de levantar el vehículo verticalmente. Para un ángulo de 90°, la componente horizontal de la fuerza que se aplica es nula.

Vamos a ver más ejemplos de descomposición de vectores, pero en este caso van a ser velocidades.

Actividad 4.9. Componentes de la velocidad

¿Cuánto tiempo tardará un avión en desplazarse una distancia horizontal de 16 km, si se eleva formando un ángulo α de 15° y con una velocidad de 250 km/s?

Solución

Para ver como se mueve en sentido horizontal el avión, necesitamos conocer la componente horizontal de la velocidad del avión, que obtenemos descomponiendo el vector velocidad de la misma manera que descomponemos fuerzas (figura 77).

Figura 77

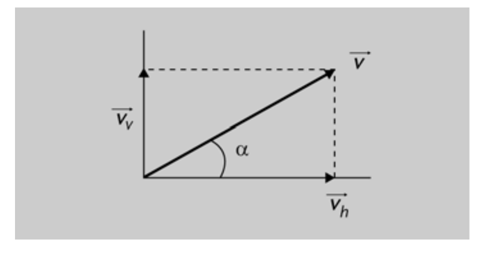


Figura 77

Descomposición del vector velocidad en dos componentes, vertical y horizontal.

Obtenemos:

$$v_H = v{\cdot}\cos\alpha = 250\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos 15^o = 241\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (197)$$

y, para un movimiento a velocidad constante:

$$t = \frac{d_H}{v_H} = \frac{16.000 \text{ m}}{241\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 66 \text{ s} \qquad (198)$$

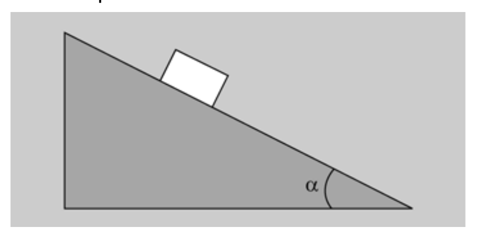
En poco más de un minuto el avión recorre 16 km sobre el terreno.

A veces la descomposición que nos interesa no es en las direcciones horizontal y vertical. Vamos a ver un ejemplo.

Actividad 4.10. Descomposición de fuerzas en direcciones determinadas

Cuando tratamos superficies inclinadas, a menudo conviene descomponer las fuerzas en componentes paralelas y perpendiculares al plano inclinado. Por ejemplo, en el esquema de la figura 78, si la caja tiene un peso $\vec{P}$, ¿qué fuerza la hará caer? (el peso es la fuerza con la que la Tierra atrae la caja y tiene la dirección vertical).

Figura 78. Un objeto de masa *m* descansa sobre un plano inclinado



Solución

Necesitáis descomponer el vector peso $\vec{P}$ en una componente que vaya en la dirección del plano inclinado y otra que sea perpendicular al plano inclinado. Luego, dibujamos el vector peso (figura 79) y construimos un rectángulo a partir de rectas paralelas y perpendiculares al plano inclinado, que pasan por el origen y por el extremo del vector peso. Los lados del rectángulo definen las componentes del peso.

El ángulo que forman la perpendicular al plano y la dirección del peso es el mismo que forma el plano inclinado con el suelo, α (por ser rectas perpendiculares entre perpendiculares). Por lo tanto, las dos componentes del peso son:

$$P_{par} = P \text{ sen } \alpha \tag{199}$$

$$P_{per} = P \cos \alpha \tag{200}$$


Figura 79

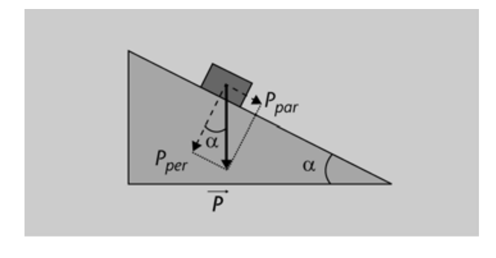


Figura 79

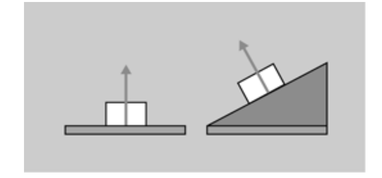
Descomposición del peso de la masa *m* en una componente paralela P_{par} y una perpendicular P_{per} al plano.

Una vez hemos descompuesto el peso en dos componentes, podemos analizar la dinámica del movimiento de la caja a partir del efecto que provoca cada componente. Según la segunda ley de Newton, si conocemos las fuerzas que actúan sobre la caja, sabremos a qué aceleración está sometida. La caja puede caer por el plano inclinado.

El efecto del plano es mantener la caja sobre su superficie y así el plano inclinado ejerce una fuerza que se denomina *normal*, porque es perpendicular al plano y dirigida hacia la caja. Esta fuerza iguala la componente perpendicular del peso, y sería la fuerza de reacción que ejerce el plano, en respuesta a la fuerza de acción que ejerce la caja.

Cuando un objeto se apoya sobre una superficie, la componente del peso del objeto perpendicular a la superficie provoca una fuerza de reacción de la superficie. La fuerza de reacción siempre tiene dirección perpendicular a la superficie, y por esto hablamos de *fuerza normal* o, simplemente, *normal*. La fuerza normal aparece siempre que hay contacto entre dos cuerpos.

Figura 80. Fuerza normal que ejerce una superficie plana o inclinada sobre el objeto que se apoya



En definitiva, la caja no experimenta ninguna aceleración en la dirección normal porque la fuerza neta que actúa en esta dirección es nula: la fuerza P_{per} está igualada por la reacción normal (o perpendicular) al plano:

$$N = P_{per} \quad (201)$$

La componente P_{par} es la que hace caer la caja por el plano, la que acelera la masa. La componente paralela siempre es menor que el peso y, por lo tanto, la caja cae por el plano con una aceleración menor que en caída libre, exactamente con una aceleración:

$$a = g \cdot \text{sen}\ \alpha \quad (202)$$

Esta expresión resulta de igualar (segunda ley de Newton) la componente P_{par} con $m \cdot a$:

$$P_{par} = m \cdot a \quad (203)$$

y de tener en cuenta la ecuación (199), $P_{par} = P \cdot \text{sen}\ \alpha$, con $P = m \cdot g$:

$$P_{par} = ma = mg \cdot \text{sen}\ \alpha \quad (204)$$

Si ahora eliminamos la masa en la igualdad anterior, resulta:

$$a = g \cdot \text{sen}\ \alpha \quad (205)$$

Únicamente para el ángulo $\alpha = \pi/2$ (plano vertical) recuperamos el caso de caída libre con la aceleración g y entonces toda la fuerza $\vec{P}$ que ejerce la Tierra es la que hace caer la caja.

En el estudio de la caja en el plano inclinado (figura 78) no hemos tenido en cuenta el rozamiento que puede haber entre la caja y la superficie del plano inclinado. En general, debería tenerse en cuenta.

4.3.3. ¿Qué hemos aprendido?

- El principio de superposición de fuerzas establece que cuando sumamos las fuerzas que actúan sobre una partícula encontramos la fuerza resultante que actúa sobre ella, y que ejerce el mismo efecto que la suma de los efectos que causa cada fuerza por separado.

- Y, a la inversa, podemos descomponer una fuerza en sus componentes con respecto a unas direcciones determinadas y estudiar el efecto de dichas componentes, que será el mismo que el efecto de la fuerza que hemos descompuesto.

Los conceptos de peso y masa son importantes y se confunden en su uso cotidiano. Conviene aclararlos.

4.4. Peso y masa

En la discusión que nos ha llevado a la segunda ley de Newton no ha aparecido en ningún momento el concepto de peso. Todos los procedimientos y las operaciones que se han efectuado pueden llevarse a cabo en cualquier nave espacial alejada de planetas y de estrellas.

Cuando hablamos del peso de un objeto estamos dando un nombre a una fuerza particular:

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (206)$$

Es la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el objeto y que le comunica una aceleración g = 9,81 m/s^2. Esta aceleración es la misma para todos los objetos, si la gravedad es la única fuerza que interviene.

Conviene tener clara la distinción entre peso y masa:

Peso y masa son conceptos (magnitudes) diferentes y que tienen unidades de medida diferentes, newton y kilogramo, respectivamente. El **peso** es la fuerza que la Tierra ejerce sobre un objeto, mientras que la **masa** es la relación que hay entre una fuerza cualquiera que actúa sobre un objeto y la aceleración que le comunica.

En la Luna, por ejemplo, la masa m de un objeto sería la misma que en la Tierra, pero el peso del objeto sería menor, poco más de la mitad que el peso que tiene la masa m en la Tierra (recordad lo que dijimos en la actividad 1.15 del apartado 1, que la gravedad en la Luna es 5/9 de su valor en la Tierra).

Vamos a ver ahora cómo se debe expresar un peso correctamente, como una fuerza.

Actividad 4.11. Peso tantos newtons

a) ¿Qué debemos decir, para hablar correctamente, en lugar de la frase "Un peso de 3,0 kg"?
b) ¿Cuál es vuestro peso aproximado?

Solución

a) Se debería hablar de una masa de 3,0 kg. Nos referimos a un objeto sobre el cual la Tierra ejerce una fuerza gravitatoria de unos 30 N:

$$mg = 3{,}00 \text{ kg} \times 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29{,}43 \text{ N} \quad (207)$$

b) Si la báscula marca 70,0 kg para nuestro cuerpo, entonces pesamos aproximadamente 700 N o, más exactamente:

$$70{,}00 \text{ kg} \times 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \ 686{,}70 \text{ N} \quad (208)$$

Aceleración de la gravedad, *g*

Aunque el valor de g (hasta la segunda cifra decimal) es:

$$g = 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

a menudo se aproxima por:

$$g \approx 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Deberían utilizarse siempre kilogramos (kg) para la magnitud masa y newtons (N) para la magnitud peso, pero es difícil apartarse del uso habitual y en la vida diaria se habla de peso en kilogramos. No se dice "yo peso 800 N", que sería lo correcto.

Veamos otra manera de referirnos a la constante g.

Actividad 4.12. Otras unidades para la aceleración de la gravedad, *g*

Una unidad menos habitual de la constante g es la siguiente:

$$g = 9{,}81 \text{ N/kg} \tag{209}$$

¿Sabríais averiguar por qué es equivalente a las unidades habituales, g = 9,81 m/s^2?

Solución

Podemos aplicar la segunda ley de Newton al peso de un objeto, ecuación (206):

$$P = mg \tag{210}$$

donde P es la fuerza peso y g la aceleración de la gravedad. Fijaos en que hemos escrito la relación entre los módulos de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{g}$.

Para una masa de 1 kg tenemos que:

$$P = mg = 1{,}0 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 9{,}81 \text{ N} \tag{211}$$

Por lo tanto:

$$g = P/m = 9{,}81 \text{ N/kg} \tag{212}$$

si expresamos la unidad newton en términos de magnitudes más básicas, ecuación (183):

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2 \tag{213}$$

y la sustituimos en la ecuación (210) recuperando la expresión más habitual, g = 9,81 m/s^2.

La expresión (209) puede ser más clara que la habitual (9,81 m/s^2) con respecto al significado físico de la constante g, porque g es la fuerza (peso) por unidad de masa, $g = P/m$.

Vamos a ver ahora cuánta fuerza es un newton.

Actividad 4.13. Idea cualitativa de qué es un newton

A un ingeniero le conviene tener una idea cualitativa de las diferentes unidades de medida. Por ejemplo, todos sabemos que una velocidad de 10 m/s (un poco más que el récord mundial de 100 m lisos) es una velocidad muy alta para una persona. ¿Cómo podemos hacernos una idea de cuánto es una fuerza de, por ejemplo, 1 N? ¿o 10 N? ¿o 100 N?

Solución

Podemos saber qué es aproximadamente una fuerza de 1 N, de 10 N y de 100 N, si sopesamos en el aire 100 g, 1 kg o 10 kg de cualquier sustancia.

Por ejemplo, si sujetamos en el aire una masa de 1 kg (1 tetrabic de leche, por ejemplo) estamos ejerciendo una fuerza de unos 10 N:

$$P = mg = 1{,}00 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 9{,}81 \text{ N} \approx 10 \text{ N} \tag{214}$$

La fuerza que ejercemos mientras sujetamos un objeto en el aire es para compensar la que la Tierra ejerce sobre el objeto, de manera que el objeto no se mueve porque está sometido a una fuerza total nula.

Las fuerzas que comunican aceleraciones pueden ejercerlas una persona, por ejemplo, pero también objetos inanimados (como un muelle comprimido que

se suelta, un cartucho de pólvora que explota e impulsa una bala de una escopeta o un vehículo que choca a otro).

4.4.1. ¿Qué hemos aprendido?

Antes de presentar y discutir la tercera ley de Newton vamos a recopilar aquí las ideas esenciales que hemos tratado sobre el concepto de fuerza y algunas que no hemos comentado aún:

- Peso y masa son magnitudes diferentes. El peso se refiere a una fuerza particular, mientras que la masa es una propiedad que caracteriza a cada cuerpo cuando lo sometemos a cualquier fuerza.

- Conviene evitar expresiones incorrectas, pero que están presentes en el lenguaje informal. No es correcto decir que una fuerza hace que un objeto "se mueva"; lo que una fuerza provoca es acelerar un objeto.

- Tampoco se puede decir que "la aplicación de una fuerza se impone sobre la inercia de un objeto y lo acelera". La inercia no es ninguna fuerza, la inercia es la tendencia de los cuerpos a permanecer en el estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme en el que puedan estar inicialmente.

- A veces se habla incorrectamente de una "fuerza" como algo que damos a un objeto, o que es una propiedad del objeto, o que reside en el objeto que se mueve o en el objeto que se está acelerando. La expresión habitual "impartimos o aplicamos una fuerza a un cuerpo" no implica ninguna de las tres afirmaciones anteriores. Las fuerzas actúan sobre los cuerpos o las ejercemos sobre los cuerpos.

- Cuando hablamos de *fuerza neta*, *fuerza total* o *fuerza resultante*, en el caso en el que haya diversas fuerzas que actúen simultáneamente sobre un cuerpo, estamos hablando de la superposición de estas fuerzas y del efecto que tendrá la suma de éstas. Pero las fuerzas que suman no "desaparecen" cuando las sumamos. Por ejemplo, si tenemos dos fuerzas diferentes que actúan sobre un cuerpo a lo largo de una dirección determinada y hablamos de su fuerza resultante, únicamente expresamos una abstracción que nos facilita el análisis del proceso; pero sobre el cuerpo no actúa una fuerza resultante, sino las dos fuerzas opuestas.

Las leyes de Newton de la dinámica son tres, la primera ley, o ley de inercia, la segunda ley, o ley fundamental de la dinámica y la tercera ley, o ley de la acción y la reacción. Ya hemos visto las dos primeras, vamos a comentar a continuación la tercera.

4.5. Tercera ley de Newton

Ya tenemos una idea formada sobre el concepto de fuerza y sabemos cómo se relaciona la aplicación de una fuerza en un cuerpo con la aceleración que le comunica. Pero en una interacción, es decir, en la aplicación de una fuerza, siempre actúan dos objetos, tanto si se trata de una fuerza de contacto como si es una fuerza de acción a distancia. Cuando apoyamos un objeto sobre una mesa, hay fuerzas de contacto entre el objeto y la mesa. Cuando la Tierra atrae una manzana que cae del árbol, es una fuerza que actúa a distancia, sin contacto; hablamos entonces de *acción a distancia*.

En efecto, en la actividad 4.10 ya hemos hablado de la fuerza normal que ejerce el plano inclinado que sostiene una caja; dicha fuerza se origina por el hecho de colocar la caja. La caja ejerce una fuerza sobre el plano inclinado y el plano inclinado ejerce una fuerza sobre la caja. Si retiramos la caja, la fuerza normal que ejerce el plano desaparece.

Cuando tenemos una interacción entre dos o más cuerpos, como la Luna, el Sol y la Tierra, o una pelota y una raqueta en un día de viento, o dos vehículos que chocan, etc., habitualmente sólo nos interesa conocer qué efecto tienen las fuerzas que actúan sobre uno de los cuerpos que interaccionan. En los ejemplos anteriores, puede interesarnos saber qué le ocurre a la Luna o a la pelota o a uno de los vehículos. La tercera ley de Newton nos permite separar mentalmente dos o más cuerpos que interaccionan y aplicar la segunda ley de Newton a uno de los objetos aisladamente.

> La **tercera ley de Newton** dice que las fuerzas siempre se ejercen por pares: si un cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{A\to B}$ sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza igual y contraria sobre el cuerpo A, $\vec{F}_{B\to A}$.

Se habla de **fuerza de acción** y **fuerza de reacción** (figura 81). Simbólicamente:

Ya habéis visto el concepto de acción y reacción en el subapartado 3.4.



$$\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B} \qquad (215)$$

Si nos interesa el comportamiento del sistema “A más B” (es decir, del conjunto de ambos cuerpos A y B) diremos que si no actúa ninguna fuerza externa al sistema, entonces la fuerza a la que está sometido el sistema es nula, porque las dos fuerzas se compensan:

$$\vec{F}_{B\to A} + \vec{F}_{A\to B} = 0 \qquad (216)$$

Figura 81. Fuerzas de acción y reacción

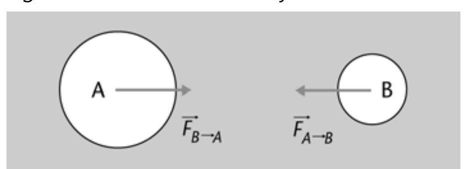


Figura 81

El cuerpo A actúa sobre el cuerpo B y el cuerpo B actúa sobre el cuerpo A. Ambas fuerzas son iguales y opuestas.

La expresión (216) indica que un sistema no puede estar acelerado por fuerzas internas, porque éstas se anulan por pares. Las fuerzas internas a un sistema no modifican el estado de movimiento.

Pero si queremos saber qué le ocurrirá al cuerpo B, por ejemplo, entonces la fuerza a la que está sometido B es únicamente $\vec{F}_{A\to B}$; esta fuerza ya no se anula con la fuerza $\vec{F}_{B\to A}$, porque esta última fuerza actúa sobre el cuerpo A y no interviene en la dinámica del cuerpo B.

Además, si en el sistema formado por los dos cuerpos A y B hay una fuerza externa $\vec{F}_A$ que actúa sobre el cuerpo A, y otra fuerza externa $\vec{F}_B$ que actúa sobre B, entonces la dinámica del cuerpo B viene determinada por el valor de la fuerza total que actúa sobre B, $\vec{F}_B + \vec{F}_{A\to B}$. Si la masa de B es m_B , podemos escribir que la aceleración que tendrá el cuerpo B es, por la segunda ley de Newton, ecuación (182), $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\vec{a}_B = \frac{\vec{F}_B + \vec{F}_{A\to B}}{m_B} \qquad (217)$$

Conviene insistir en el hecho de que las fuerzas de acción y reacción están aplicadas sobre cuerpos diferentes. Por esta razón no se anulan (no se compensan) si consideramos un solo cuerpo y las fuerzas que actúan sólo sobre este cuerpo.

La expresión (217) nos da la dinámica del cuerpo B. Y ¿cuál es la expresión para el cuerpo A?

Actividad 4.14. Fuerzas que actúan sobre un solo cuerpo

De manera parecida diremos que, en el caso que acabamos de discutir, si sobre el cuerpo *A* actúa una fuerza $\vec{F}_A$, la aceleración del cuerpo *A* viene determinada por... (escribid la ecuación).

Solución

Debemos escribir en la expresión de la segunda ley sólo las fuerzas que actúan sobre el cuerpo *A*, que son la fuerza que ejerce el cuerpo *B*, $\vec{F}_{B\to A}$, y la fuerza externa que actúa sobre *A*, $\vec{F}_A$:

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{F}_A + \vec{F}_{B\to A}}{m_A} \qquad (218)$$

La aceleración del cuerpo *A* será diferente, en general, de la del cuerpo *B*, ecuación (217).

Las fuerzas externas que actúan sobre un sistema, como las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ del ejemplo anterior, *no* forman un par de fuerzas de acción y reacción. Veamos por qué.

Actividad 4.15. Fuerzas entre tres cuerpos

En el ejemplo anterior de los dos cuerpos A y B debe cumplirse la relación (215). ¿Qué nos dice el tercer principio de la dinámica (o tercera ley de Newton) sobre las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$? ¿Deben ser iguales y opuestas? Exponed un ejemplo.

Solución

Las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ no tienen por qué ser iguales y opuestas, porque no forman un par de acción-reacción. Lo que sí que debe ser igual a $\vec{F}_A$, y de sentido contrario, $-\vec{F}_A$, es la fuerza que ejerce el cuerpo *A* sobre el agente externo que actúa sobre *A*.

Igualmente, $-\vec{F}_B$ es la fuerza que ejerce el cuerpo *B* sobre el agente externo.

Para aclarar de qué hablamos cuando en el ejemplo anterior decimos que tenemos dos cuerpos A y B y que sobre ellos actúan fuerzas externas al sistema formado por los dos cuerpos, veamos un ejemplo: el sistema de los dos cuerpos Tierra-Luna, con el Sol como cuerpo externo.

Figura 82

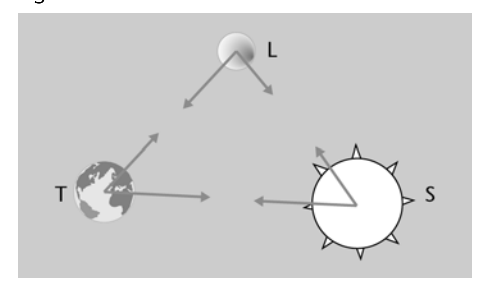


Figura 82

Un sistema de tres cuerpos y las fuerzas que actúan: Tierra (T), Sol (S) y Luna (L) (el dibujo no está a escala).

Las fuerzas que actúan entre los tres cuerpos son las siguientes:

- $\vec{F}_{Tierra \to Luna}$: fuerza que ejerce la Tierra sobre la Luna.
- $\vec{F}_{Luna \to Tierra}$: fuerza que ejerce la Luna sobre la Tierra, $\vec{F}_{Luna \to Tierra} = -\vec{F}_{Tierra \to Luna}$ (fuerza de reacción).
- $\vec{F}_{Sol \to Tierra}$: fuerza que ejerce el Sol sobre la Tierra, $-\vec{F}_{Sol \to Tierra}$ es la fuerza de reacción que ejerce la Tierra sobre el Sol.
- $\vec{F}_{Sol \to Luna}$: fuerza que ejerce el Sol sobre la Luna, $-\vec{F}_{Sol \to Luna}$ es la fuerza de reacción que ejerce la Luna sobre el Sol.

La aceleración de la Tierra está provocada únicamente por las fuerzas que actúan sobre ella: la del Sol y la de la Luna.

$$\vec{a}_{Tierra} = \frac{\vec{F}_{Sol \to Tierra} + \vec{F}_{Luna \to Tierra}}{m_{Tierra}} \qquad (219)$$

y la aceleración de la Luna estará dada por las fuerzas que actúan sobre la Luna: la del Sol y la de la Tierra:

$$\vec{a}_{Luna} = \frac{\vec{F}_{Sol \to Luna} + \vec{F}_{Tierra \to Luna}}{m_{Luna}} \qquad (220)$$

Las fuerzas externas al sistema Tierra-Luna, las fuerzas que ejerce el Sol y que aparecen en las relaciones (219) y (220) no forman pares de acción-reacción entre sí, igual que pasa en las relaciones (217) y (218) con las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$: no tiene nada que ver la fuerza que ejerce el Sol sobre la Tierra con la fuerza que ejerce el Sol sobre la Luna.

Hay que prestar atención, pues, a qué fuerzas actúan sobre un cuerpo concreto y con cuáles forman un par acción-reacción. Veamos otro ejemplo.

Actividad 4.16. Fuerzas de acción y reacción

a) ¿Qué objetos de los que hay a nuestro alrededor pueden ejercer fuerzas?

b) Considerad el sistema pelota-raqueta y el aire y la Tierra como agentes externos. ¿Cómo determinaríais la aceleración de la pelota en los dos casos siguientes?

- Cuando la golpeamos.
- Cuando la pelota vuela hacia el otro jugador.

Solución

a) Todos los cuerpos pueden ejercer fuerzas: un muelle comprimido por una mano ejerce una fuerza sobre la mano para recuperar su longitud inicial; una silla ejerce una fuerza sobre la persona que se sienta, una mesa ejerce una fuerza sobre el libro que está apoyado sobre ésta; etc. Y, por la tercera ley de Newton, la persona ejerce la misma fuerza (y opuesta) sobre la silla, o el libro la ejerce contra la mesa, etc.

b) La fuerza que impulsa la pelota es la de la raqueta, y actúa en el instante del golpe (precisamente, durante la interacción entre la raqueta y la pelota). La aceleración de la pelota en el instante del golpe es la producida por la suma de la fuerza gravitatoria y la fuerza que la raqueta ejerce sobre aquélla. En vuelo, únicamente actúan sobre la pelota la atracción gravitatoria y el rozamiento provocado por el aire.

Como vemos, siempre debemos prestar atención a qué fuerzas es necesario considerar. Además, algunas fuerzas pueden despreciarse en ciertos casos. Vamos a verlo.

4.5.1. Efectos de las fuerzas

En la actividad que acabamos de realizar hemos hablado de las fuerzas que ejercen los objetos al dar un golpe, o de la fuerza con la que la Tierra atrae los objetos. Pero una raqueta y una pelota también se atraen en todo momento con una fuerza gravitatoria, ya que cualquier par de masas se atraen mediante este tipo de fuerza. Es el mismo tipo de fuerza que provoca que la Tierra atraiga todas las masas, o que el Sol atraiga la Tierra.

Pero la atracción gravitatoria entre una raqueta y una pelota es tan extremadamente pequeña en comparación con la que ejerce la Tierra sobre estos objetos, que no es necesario tenerla en cuenta.

Solemos olvidar que un papel ejerce una fuerza sobre la Tierra. El hecho de que una hoja de papel sea atraída por la Tierra no nos sorprende, pero nos resulta extraño que este papel atraiga la Tierra con una fuerza idéntica, en módulo, pero de sentido contrario, como nos dice la tercera ley de Newton. Una cosa es que una fuerza resulte despreciable y otra es que no exista una fuerza. Vamos a ver la actividad siguiente.

Actividad 4.17. Fuerzas despreciables

Comentad esta afirmación: “Cuando nos subimos a una mesa de plástico, ésta se deforma porque nuestro peso ejerce una fuerza sobre la mesa. Pero cuando depositamos una hoja de papel sobre la misma mesa, ésta no se deforma.”

Solución

La mesa sí se deforma cuando depositamos una hoja de papel, por la misma razón que se deforma si nos subimos encima, pero el efecto es tan pequeño que es inobservable para nosotros.

¡Qué una fuerza sea *muy* pequeña no significa que no exista!

Por lo tanto, a pesar de que en algunos casos ciertas fuerzas son despreciables o tienen efectos despreciables, debemos tener presente lo que afirma la **tercera ley de Newton** o **tercer principio de la dinámica**, que se puede enunciar de forma abreviada de la manera siguiente: **para cualquier acción hay una reacción igual y opuesta**.

El contenido de la ley queda más claro y explícito si hacemos el doble enunciado siguiente: si un objeto ejerce una fuerza sobre otro, el segundo ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el primero; y cada fuerza actúa sobre un cuerpo diferente.

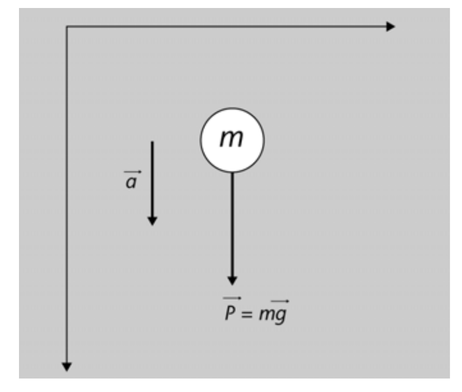
Una idea fundamental del enunciado del tercer principio es que estamos hablando de *dos* fuerzas diferentes y que cada una de éstas actúa sobre un cuerpo *diferente*.

Aunque hablamos de fuerzas de acción y reacción, no tiene importancia a cuál denominamos *acción* y a cuál *reacción*: es igualmente correcto decir que un libro ejerce una fuerza sobre la mesa y que la mesa ejerce la misma fuerza y en sentido contrario sobre el libro, que si lo enunciamos al revés.

Acabaremos la discusión de la tercera ley de Newton con unas consideraciones sobre la observación de la fuerza de reacción. Cuando las fuerzas son de contacto entre dos cuerpos, no nos resulta extraño decir que cada uno experimenta la fuerza que ejerce el otro cuerpo. Y en el caso de acciones a distancia, como es el caso de la fuerza gravitatoria, podemos observar la fuerza que ejerce la Tierra sobre un libro: si lo soltamos, el libro cae aceleradamente al suelo, con una aceleración que, de acuerdo con la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, es:

$$\vec{g} = \frac{\vec{\text{P}}\text{eso del libro}}{\text{masa del libro}} \qquad (221)$$

Figura 83. Peso de un objeto de masa *m* y aceleración en caída libre



Sin embargo, no podemos apreciar la fuerza (igual y contraria) que ejerce el libro sobre la Tierra.

Órdenes de magnitud

El orden de magnitud es el exponente del factor 10 que relaciona los valores de las magnitudes que comparamos.

Por ejemplo, si un objeto es 1.000 veces mayor que otro, decimos que es 3 órdenes de magnitud (10^3 veces) mayor.

Si un objeto tiene una masa de 0,01 kg y otro de 100 kg, decimos que es cuatro órdenes de magnitud más masivo (100 kg / 0,01 kg = 10^4).

Si el orden de magnitud de alguna propiedad es el mismo para dos objetos, decimos que tenemos el mismo orden de magnitud con respecto a esta propiedad.

Actividad 4.18. Observad fuerzas gravitatorias

¿Cuál es la aceleración que resultaría para la Tierra en el ejemplo de la ecuación (218), si únicamente existiera el sistema Tierra-libro?

Solución

La fuerza que ejerce el libro sobre la Tierra, por el tercer principio de la dinámica, es $-\vec{P}$, si $\vec{P}$ es el peso del libro y, por lo tanto, obtenemos la aceleración de la Tierra a partir de la aplicación del segundo principio de la dinámica:

$$\vec{a}_{Tierra} = -\frac{\vec{P}}{masa\ de\ la\ Tierra} \tag{222}$$

y, como el peso de un cuerpo es el producto $m\vec{g}$:

$$\vec{a}_{Tierra} = -\frac{masa\ del\ libro \cdot \vec{g}}{masa\ de\ la\ Tierra} = -\frac{masa\ del\ libro}{masa\ de\ la\ Tierra} \cdot \vec{g} \tag{223}$$

Como la masa del libro (del orden de 1 kg) es muchos órdenes de magnitud inferior a la de la Tierra (del orden de 6×10^{24} kg), podemos decir de la relación (223) que:

$$|\vec{a}_{Tierra}| << |\vec{a}_{libro}| = |\vec{g}| \tag{224}$$

La masa de la Tierra es muy grande en comparación con los objetos que nos rodean y no podemos ver las fuerzas de acción y reacción en el caso del sistema Tierra-objeto. En el caso de otras fuerzas a distancia, como dos imanes de tamaño diferente, sí que podemos observar que ambos se aceleran (se atraen o se repelen) y, por lo tanto, sí que vemos en acción las dos fuerzas que predice la tercera ley de Newton.

Análogamente, si tenemos, por ejemplo, dos bolas que contienen imanes, las dos se mueven por la fuerza a distancia que actúa, que es la fuerza magnética que hace que las bolas se atraigan o se repelan.

El caso de la atracción gravitatoria entre la Tierra y el libro, en el que sólo una fuerza del par acción-reacción es observable, es parecido al caso en el que esparcimos pequeños clavos sobre una mesa y colocamos a su lado un imán grande: sólo veremos que los clavos se mueven, se aceleran hacia el imán, pero no observamos que el imán se acelere en sentido contrario.

¿Por qué ocurre esto?

Actividad 4.19. Fuerzas sobre imanes

Explicad por qué no se mueve el imán grande en la situación que acabamos de describir, tanto si lo sujetamos con las manos como si lo dejamos reposar sobre la mesa, cerca de los clavos.

Solución

La figura 84 muestra algunos clavos delante de un imán. El rozamiento del imán con la mesa (o la sujeción del imán por la mano) impide el movimiento del imán, porque esta fuerza es superior a la que ejercen los clavos sobre el imán.

También hay fricción de los clavos con la mesa, pero en este caso la fuerza del imán es la más grande y la resultante es una aceleración de los clavos en la dirección del imán.

Figura 84. Imanes y clavos sobre una mesa

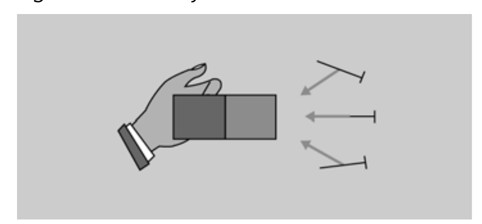


Figura 84

El imán no se mueve (a pesar de que no lo sujetamos con la mano) pero los clavos sí que son atraídos por el imán.

Vemos que el hecho de no percibir una fuerza no equivale a que no exista. Si ponemos el imán sobre una superficie resbaladiza, podremos ver que los clavos atraen el imán.

En conclusión, la segunda ley de la dinámica nos dice cómo calcular la aceleración de un cuerpo si conocemos las fuerzas que actúan sobre él.

La tercera ley de la dinámica nos dice que las fuerzas siempre actúan por pares. Por lo tanto, es importante saber representar todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo cuya dinámica nos interese, y que sean únicamente las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. También es importante no representar más que fuerzas en un diagrama de fuerzas: ni velocidades, ni aceleraciones, por ejemplo. De hecho, los diagramas de fuerzas son útiles a la hora de resolver problemas de dinámica. Vamos a verlo.

4.5.2. Diagramas de fuerzas de cuerpo libre

Se denomina *diagrama de fuerzas de cuerpo libre* un esquema en el que se representan únicamente el cuerpo que estamos analizando y todas las fuerzas que actúan sobre él. En un diagrama de cuerpo libre deben mostrarse únicamente las fuerzas que se ejercen *sobre* el objeto o sistema de interés; no deben representarse las fuerzas que el propio cuerpo ejerce sobre otros objetos.

Por ejemplo, si tenemos un libro encima de una mesa y presionamos sobre el libro con los dedos de nuestra mano, el diagrama de fuerzas de cuerpo libre del libro es el de la figura 85. Al peso del libro, $\vec{P}$, y la fuerza que ejercemos con la mano, $\vec{F}_{mano}$, se opone la fuerza que ejerce la mesa, $\vec{F}_{mesa}$.

Figura 85

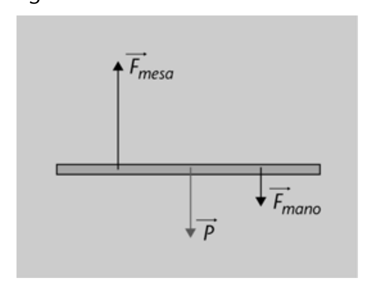


Figura 85

Diagrama de fuerzas de cuerpo libre para un libro que está encima de una mesa y se sujeta con un dedo. Se han representado las fuerzas de manera arbitraria en puntos diferentes del libro.

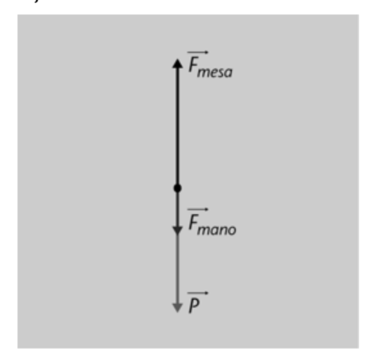
La suma de las fuerzas hacia abajo (peso y fuerza que ejercemos) se ve compensada exactamente por la reacción normal de la mesa, que se dirige hacia arriba:

$$\vec{P} + \vec{F}_{mano} = \vec{F}_{mesa} \tag{225}$$

La fuerza total que actúa sobre el libro es nula y, por eso, el libro tiene aceleración nula.

El dibujo de la figura 85 se ha hecho expresamente de manera poco "ortodoxa". Resulta más útil para analizar la dinámica del libro hacer un esquema más sencillo, como el de la figura 86, en que el libro se representa con un punto (una partícula) que concentra la masa del libro y sobre éste se representan las fuerzas en la dirección que tiene cada una; en el caso que nos ocupa, todas son verticales. Además, las longitudes de los vectores son una indicación del valor de la fuerza, que da una idea del valor de su intensidad.

Figura 86. Diagrama de fuerzas de cuerpo libre para un libro que está encima de una mesa y se sujeta con un dedo



Actividad 4.20. Diagrama de cuerpo libre

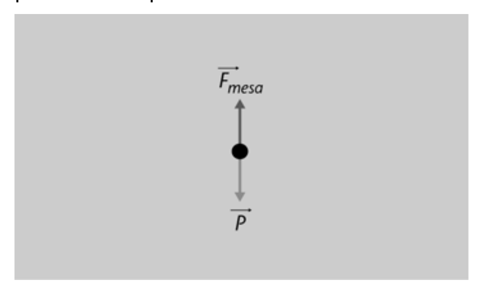
a) Confeccionad el diagrama de fuerzas de cuerpo libre para el libro depositado sobre la mesa, cuando quitamos los dedos que se apoyan sobre él.

b) Imaginad que la mesa está inclinada (o que el libro está en un atril). Confeccionad el diagrama de cuerpo libre para el libro cuando nos ayudamos de los dedos para mantenerlo en el atril.

Solución

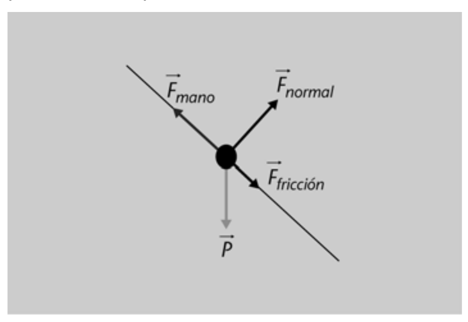
a) El diagrama de cuerpo libre para el libro es igual que el de la figura 86, pero con una fuerza de la mesa menor, porque ahora compensa únicamente el peso del papel, figura 87.

Figura 87. Diagrama de fuerzas de cuerpo libre para un libro que está encima de una mesa



b) Ahora intervienen las fuerzas siguientes sobre el libro: el peso, la fuerza normal de la mesa, la fuerza que ejercemos con los dedos y la fuerza de fricción que ejerce el atril sobre el libro. Supongamos que con los dedos sujetamos el libro por la parte inferior. Como el movimiento que provocaríamos con la mano para evitar la caída del libro es en el sentido ascendente del atril, la fuerza de fricción tiene la dirección contraria. En la figura 88 se representan las cuatro fuerzas mencionadas.

Figura 88. Diagrama de fuerzas de cuerpo libre para un libro que está encima de una mesa



Si la resultante de las cuatro fuerzas de la figura 88 no es nula, el libro caerá aceleradamente por el atril (si la resultante va hacia abajo) o subirá con aceleración (si la resultante tiene el sentido ascendente, sobre el atril).

Fijaos en que si quitamos la mano, el libro tenderá a deslizarse y caer por el atril y, entonces, la fuerza de fricción tendría el sentido contrario al de la figura 88: iría en sentido ascendente del atril. Las fuerzas de fricción siempre tienen dirección contraria a la del movimiento. Si el libro se mantiene en reposo sobre el plano inclinado sin la ayuda de la mano es porque la fuerza de fricción compensa exactamente la resultante del peso y de la normal.

Como hemos visto, el diagrama de fuerzas de cuerpo libre permite analizar la dinámica de un cuerpo de manera más sencilla.

4.5.3. ¿Qué hemos aprendido?

a) Siempre que un agente externo ejerce una fuerza sobre un cuerpo, hay una fuerza igual en módulo y de sentido contrario que el cuerpo ejerce sobre el agente externo.

- También es necesario distinguir entre efectos pequeños o despreciables de las fuerzas y efectos nulos por ausencia de fuerzas. En la actividad 4.17 hemos visto un ejemplo de efecto despreciable, pero no nulo.

- Es necesario distinguir entre fuerzas inexistentes y fuerza resultante nula.

- En el caso de dos fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre un objeto (por ejemplo, si dos personas tiran de una tercera con la misma fuerza y en sentidos opuestos), el efecto sería estrictamente nulo. Pero esto no significa que no haya fuerzas en acción.

b) En un diagrama de fuerzas de cuerpo libre únicamente se incluyen las fuerzas que actúan sobre el cuerpo cuya dinámica queremos analizar.

4.6. Recapitulación

Ya estamos equipados con las tres leyes de Newton de la dinámica, que permiten abordar cualquier problema de movimientos.

- La primera ley de Newton, o principio de inercia, introduce el concepto de fuerza de manera cualitativa y hace equivalentes (es decir, indistinguibles) el estado de reposo y el estado de movimiento rectilíneo y uniforme.

- La segunda ley de Newton permite formular una definición explícita de la expresión de la magnitud *fuerza*, e introduce el concepto de masa inercial.

- La determinación de una ley de movimiento para una partícula pasa por resolver la segunda ley de Newton, que nos da la aceleración de la partícula a partir de las fuerzas que actúan sobre ésta.

- La tercera ley de Newton, o ley de acción y reacción, afirma que las fuerzas siempre actúan por pares y que cada una de las fuerzas del par actúa sobre un cuerpo diferente. Son las fuerzas de acción y reacción.

- Cuando intervienen interacciones gravitatorias, habitualmente no se suele incluir la Tierra en el diagrama de fuerzas ni las fuerzas que actúan sobre la Tierra; ya sabemos que, por la tercera ley de Newton, a la fuerza (peso) de un objeto le corresponde una fuerza igual y contraria que el objeto ejerce sobre la Tierra.

- En los diagrama de fuerza de cuerpo libre, únicamente se representan las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que se estudia.

- Las fuerzas, aceleraciones y velocidades son magnitudes vectoriales y pueden tratarse con las herramientas del álgebra lineal, porque obedecen al principio de superposición.

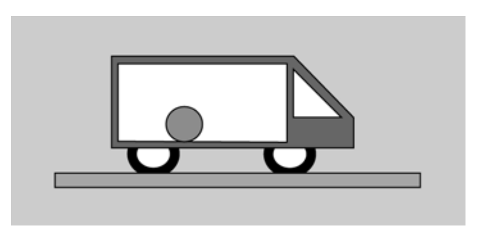
- La masa, el tiempo, el volumen, etc., son ejemplos de magnitudes escalares.

4.7. Problemas de ampliación

Problema 4.1. Efectos de la inercia

En el esquema de la figura siguiente se muestra una pelota en reposo dentro de un vehículo. Si el vehículo arranca bruscamente, explicad qué le ocurrirá a la pelota.

Figura 89. Una pelota en reposo sobre el suelo de un vehículo



Problema 4.2. Inercia y segunda ley

Comentad las frases siguientes:

a) "El reposo es una condición fundamental diferente del estado de movimiento rectilíneo y uniforme, porque en el estado de reposo no actúa ninguna fuerza, pero sí en el estado de movimiento."

b) "Lo que hace que un cuerpo se mueva en línea recta y con velocidad uniforme es lo mismo que lo que hace que un cuerpo que está en movimiento se detenga."

c) "La Luna y la Tierra se atraen por la fuerza gravitatoria. Pero para mantener la Luna girando alrededor de la Tierra no es necesario que actúe ninguna fuerza, según el principio de inercia."

Problema 4.3. Fuerzas que no aceleran

Si una fuerza siempre acelera un objeto, ¿por qué no se acelera un libro que reposa sobre una mesa, si le aplicamos una fuerza pequeña en la dirección horizontal?

Problema 4.4. Aceleraciones bruscas

Explicad los efectos descritos en la actividad 4.2 a la luz del primer principio de la dinámica. Explicad qué ocurre si:

a) el coche en el que viajáis toma una curva bruscamente;
b) vais de pie en un autobús que frena de repente;

c) el coche en el que viajáis va a una velocidad constante por una carretera recta y lisa y de repente hay una fuerte bajada (un cambio de rasante brusco).

Problema 4.5. Aire y gravedad

Comentad si son ciertas las afirmaciones siguientes y por qué:

a) Si eliminásemos el aire, la gravedad desaparecería.

b) Un globo lleno de aire no flota y cae al suelo.

c) Si ponemos un globo lleno de aire dentro de un cilindro vertical y hermético en el que hemos hecho el vacío (hemos eliminado el aire que había en el cilindro), entonces el globo lleno de aire sí que flota porque no actúa la presión de la atmósfera.

Problema 4.6. Movimiento de "proyectiles"

Supongamos que golpeamos horizontalmente una pelota de tenis. ¿Qué trayectoria sigue? ¿Qué distancia recorre antes de tocar el suelo?

Aplicación numérica: supongamos que la pelota tiene una masa de 100 g, está a una altura inicial de 1 m, y el golpe le comunica una velocidad de 10 m/s. ¿A cuántos metros cae?

Problema 4.7. Acción y reacción

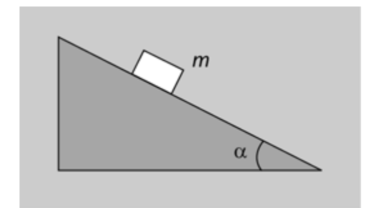
Describid las fuerzas de acción y reacción para una silla que está en el suelo y explicad por qué está en equilibrio.

Problema 4.8. Fricción

a) ¿Qué fuerzas actúan sobre el cuerpo de la figura siguiente, cuando está en equilibrio?

b) Si el cuerpo se desliza por el plano inclinado sin rozamiento, ¿con qué aceleración cae?

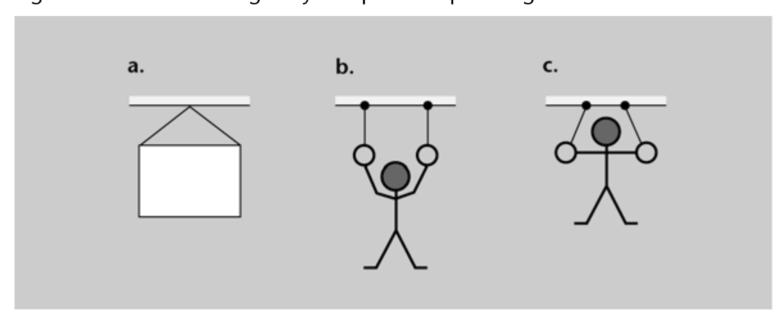
Figura 90. Una masa *m* sobre un plano inclinado



Problema 4.9. Fuerzas y direcciones

¿Por qué es más difícil hacer la postura **c** que la **b**?

Figura 91. Un cuadro colgado y una persona que cuelga de unas anillas



5. Energía, momento lineal y leyes de conservación

El objetivo principal de este apartado es introducir herramientas que faciliten el tratamiento de problemas dinámicos. Aparecerán conceptos muy básicos de la física, como el de momento lineal, trabajo que hace una fuerza y potencia. Introduciremos el concepto de campo de fuerzas conservativo, que nos permitirá hablar de la energía potencial de un sistema y definiremos el concepto de energía cinética. Analizaremos cuándo se puede hablar de conservación de la energía total y de la conservación del momento lineal de un sistema. También estudiaremos la relación entre el trabajo que hace una fuerza sobre una partícula y la energía cinética que le comunica.

Descripción de procesos

Las leyes de Newton permiten abordar y resolver los problemas de dinámica. Como afirma la primera ley de la dinámica, es necesario aplicar una fuerza para conseguir poner un objeto en movimiento o para variar su estado de movimiento. Para sostener un objeto es necesario ejercer una fuerza en contra de su peso, pero si además movemos el objeto y lo cambiamos de posición, la fuerza que ejercemos se desplaza, y debemos aprender a describir este tipo de proceso.

De esta manera, para subir un objeto por unas escaleras es necesario hacer un "esfuerzo", que denominaremos *trabajo* en términos físicos y que definiremos de manera precisa en este apartado. Es necesario hacer un trabajo diferente para subir, por ejemplo, que para subir con una caja llena de libros. Además, si los objetos que hemos subido arriba del armario caen al suelo o encima de una mesa de cristal, tienen un efecto diferente si se trata de un solo libro o si se cae la caja llena de libros. En este apartado formalizaremos los conceptos necesarios para describir estas situaciones en términos científicos.

La ciencia emplea palabras de uso cotidiano de una manera muy concreta, con un significado preciso, que no siempre se corresponde con el significado que le damos en el lenguaje cotidiano. Por ejemplo, introduciremos los conceptos físicos de energía y de trabajo que hace una fuerza. También definiremos el término *momento lineal* que, al no ser un término habitual, no suele dar lugar a confusiones. En todos los casos deberemos memorizar tanto el nombre como la definición operativa del término, su significado, las unidades en las que se mide y las relaciones más importantes en las que interviene.

De la misma manera que la ciencia tarda años (y, a veces, siglos) en depurar los conceptos y las leyes que formula, aprender a utilizar el lenguaje científico es un proceso que requiere esfuerzo. La comprensión y la memorización de estos conceptos abstractos y de las expresiones algebraicas que los definen o los

relacionan se consigue cuando estos conceptos se emplean para abordar problemas diferentes y para describir los procesos físicos que intervienen en ellos. Al acabar los apartados de mecánica habréis aprendido a utilizar conceptos como los mencionados (trabajo, energía, momento lineal) con un significado científico preciso, en frases como las siguientes: "trabajo que hace una fuerza neta", "cambio del momento lineal de un cuerpo", "variación de la energía cinética del objeto", "trabajo hecho contra una fuerza", "cambio de la energía potencial de un sistema", etc.

También veréis que las leyes físicas limitan los tipos de movimientos o de procesos que son posibles.

¿Qué aprenderemos?

- Aprenderemos los siguientes conceptos básicos de la física: trabajo, momento lineal, energía cinética, energía potencial y energía total.

- Aprenderemos a enunciar y a utilizar las leyes de conservación que involucran algunas de estas magnitudes y que son herramientas muy útiles para el estudio de procesos físicos, tanto naturales como generados por la actividad humana.

¿Qué supondremos?

Los contenidos de este apartado se basan en las tres leyes de Newton que ya conocéis (apartado 4). Emplearemos también, como en otros apartados, el álgebra vectorial y el cálculo integrodiferencial.

5.1. Momento lineal

Comenzamos introduciendo el concepto de momento lineal, que en algunos libros de texto aún se denomina *cantidad de movimiento*. Es un concepto muy importante en física, pero que no se utiliza en el lenguaje cotidiano informal.

El concepto de velocidad es útil, pero no es suficiente para describir el movimiento de los cuerpos ni los efectos que puede tener este movimiento sobre otros cuerpos. Pensemos, por ejemplo, en una bicicleta y un camión, que circulan a la misma velocidad $\vec{v}$. Está claro que no se requiere el mismo tipo de interacción para pasar del estado de reposo ($\vec{v} = 0$) a una velocidad $\vec{v}$ en el caso de la bicicleta que en el del camión, y también parece evidente que los dos vehículos no provocan el mismo efecto sobre un árbol si, por ejemplo, la bicicleta o el camión chocan contra éste aunque lleven la misma velocidad antes del choque. En los dos casos (acelerar de 0 a $\vec{v}$ y frenar de golpe) interviene también la masa inercial del cuerpo.

Vector multiplicado por escalar

Para un número c positivo, $c > 0$, y un vector $\vec{s}$, el producto $c\vec{s}$ es un vector paralelo a $\vec{s}$ y del mismo sentido.

Si las componentes del vector $\vec{s}$ son: $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$, entonces las componentes del vector $c\vec{s}$ son: $c\vec{s} = (cs_x, cs_y, cs_z)$.

Si $c < 0$ el vector $c\vec{s}$ es un vector paralelo a $\vec{s}$ y de sentido opuesto a $\vec{s}$.

Resulta útil, por lo tanto, definir una magnitud nueva que tenga en cuenta tanto la masa como la velocidad del cuerpo. La denominamos **momento lineal** y se representa habitualmente con la letra $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad (226)$$

El **momento lineal** de una partícula de masa *m* que se mueve a la velocidad $\vec{v}$ es el producto de su masa por su velocidad.

La expresión anterior es una definición; por lo tanto, es necesario memorizarla y no cuestionar su necesidad en este momento. La utilidad de este concepto se verá cuando la apliquemos y nos sea útil para analizar diversos tipos de fenómenos.

De esta manera, a una partícula en movimiento de masa *m* se le puede asociar el vector $\vec{p}$. El momento lineal es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección y sentido que la velocidad de la partícula, porque hemos multiplicado un vector por un escalar positivo. La unidad de momento lineal en el Sistema Internacional la obtenemos, como siempre, a partir de la definición de la magnitud cuando damos un valor unitario a las magnitudes que intervienen:

$$\left[\vec{p}\right] = 1 \text{ kg } \; 1 \; \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \text{ kg m s}^{-1} \qquad (227)$$

Actividad 5.1. Definición

Definid con palabras la unidad SI de la magnitud momento lineal. ¿Cuándo diremos que una partícula tiene un momento lineal unitario?

Solución

Según la ecuación (227), el momento lineal se mide en unidades de kilogramo metro por segundo.

Una partícula tiene un momento lineal unitario si tiene una masa de 1 kg y se mueve a una velocidad de 1 m/s, por ejemplo, o si tiene una masa de ½ kg y se mueve a una velocidad 2 m/s, etc.

El concepto de momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ es muy potente para describir fenómenos físicos, como veremos durante el curso. Se trata de un concepto abstracto que no tiene equivalente (ni se suele emplear) en el lenguaje ordinario, fuera de los usos científicos y, por lo tanto, resulta un término muy técnico. Podemos relacionar el concepto de momento lineal con el concepto de fuerza, de la manera siguiente.

La **segunda ley de Newton** puede escribirse **en términos del momento lineal**, en lugar de relacionarla con la derivada de la velocidad, de la manera siguiente:

$$\vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (228)$$

Es decir, hay una **relación fuerza-momento lineal**:

La fuerza neta (o fuerza resultante) que actúa sobre una partícula que tiene un momento lineal $\vec{p}$ coincide con la derivada temporal del momento lineal.

Actividad 5.2. Fuerza y ritmo de cambio del momento lineal

Demostrad la relación (228).

Solución

Si la masa de la partícula es constante, la ecuación (228) adopta la forma conocida de la segunda ley, porque si sustituimos la expresión (226):

$$\vec{F}_{neta} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \tag{229}$$

obtenemos, cuando sacamos la constante m fuera de la derivada:

$$\vec{F}_{neta} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{230}$$

y como la derivada temporal de la velocidad es la aceleración (ecuación 98 del subapartado 2.3.2), llegamos a la segunda ley de Newton en su forma usual:

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a} \tag{231}$$

Por lo tanto, la expresión (228) es otra forma de expresar la segunda ley de Newton.

En la forma (228) en la que se presenta a veces la segunda ley de Newton podemos analizar más fácilmente procesos en los que la masa del cuerpo también varía. Es el caso, por ejemplo, del movimiento de una nave espacial de propulsión que avanza al expulsar los combustibles que va quemando; en este proceso la nave pierde masa.

Se puede considerar que la segunda ley de Newton relaciona fuerzas aplicadas y aceleraciones provocadas, o bien que relaciona fuerzas aplicadas y cambios provocados en la dirección del momento lineal. A continuación vamos a analizar la relación entre las fuerzas aplicadas y la trayectoria de una partícula en un ejemplo concreto.

5.1.1. Fuerza y dirección de movimiento

A veces se plantea la cuestión de si el movimiento de un objeto se produce en la dirección de la fuerza que se aplica a éste. Una fuerza aplicada acelera un cuerpo en la dirección de la fuerza, pero aceleración y velocidad no tienen por qué coincidir. Un caso claro es el de la partícula en movimiento circular, en el que fuerza aplicada y aceleración son radiales, mientras que la velocidad es perpendicular al radio, tangente a la circunferencia (recordad la figura 38 de la actividad 2.8).

Veamos otro ejemplo: si un objeto está en movimiento y lo golpeamos en una dirección diferente a la de su movimiento continuará en movimiento pero en una dirección nueva, que no tiene por qué coincidir con la dirección de la fuerza aplicada. Es la situación que se presenta cuando, por ejemplo, un objeto se cae al suelo y a medio camino le damos un golpe con la mano o con el pie: el objeto acabará cayendo, pero seguirá una trayectoria no vertical (ni horizontal, en el sentido del golpe), sino parabólica.

Actividad 5.3. Fuerza y dirección de movimiento

Imaginad que durante un breve tiempo hemos aplicado una fuerza (le hemos dado un golpe) a un objeto que cae en caída libre y que la fuerza tiene, por ejemplo, dirección horizontal, perpendicular a la dirección inicial de caída. ¿Cómo será el movimiento de caída del objeto después del golpe?

Solución

Aplicar brevemente una fuerza en dirección horizontal al objeto que cae verticalmente equivale a dar al objeto que cae una velocidad "inicial" horizontal que antes no tenía, es decir, a acelerarlo en la dirección horizontal. La trayectoria, en este caso particular, será como la de la figura 92, es decir, parabólica a partir del impacto. Respecto al movimiento del objeto, el problema es como el del lanzamiento horizontal de un objeto que hemos estudiado en el problema 4.6, con la única diferencia de que el objeto ahora también tiene una velocidad inicial de caída.

Figura 92

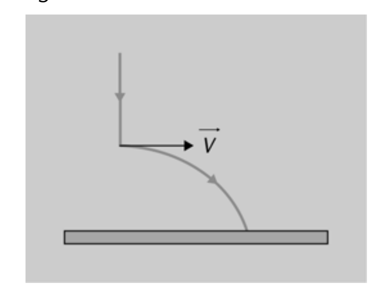


Figura 92

Un objeto recibe el efecto de una fuerza breve horizontal mientras está cayendo verticalmente. La trayectoria del movimiento no tiene la dirección inicial ni tampoco la dirección de la fuerza aplicada.

En conclusión, los objetos no tienen por qué moverse en la dirección de la fuerza aplicada.

De hecho, este resultado ya lo conocíamos: si lanzamos un objeto, como una pelota, la fuerza de la gravedad actúa en todos los puntos de la trayectoria de la pelota, en el sentido vertical y hacia abajo, pero la pelota se mueve con una trayectoria parabólica, diferente a la dirección de la fuerza aplicada.

5.1.2. ¿Qué hemos aprendido?

- Hemos introducido el concepto de momento lineal, que nos ha permitido reformular la expresión matemática de la segunda ley de Newton.
- Podemos decir que una fuerza acelera un cuerpo y, también, que cambia su momento lineal.
- Las fuerzas y aceleraciones que producen son paralelas, pero fuerzas (o aceleraciones) y velocidades resultantes no tienen por qué serlo.

Ahora vamos a ver qué efecto tiene una fuerza cuando actúa a lo largo de la trayectoria de la partícula. El concepto de trabajo que introduciremos es básico en la mecánica y en toda la física.

5.2. Trabajo que hace una fuerza

El concepto físico de la magnitud *trabajo de una fuerza* que actúa a lo largo de la trayectoria de una partícula es concreto, y no siempre coincidente con el de la vida diaria. En términos físicos, la magnitud **trabajo infinitesimal** se define de la manera siguiente.

> Se denomina **trabajo elemental** (o infinitesimal), dW, que realiza una fuerza $\vec{F}$ que actúa a lo largo del elemento de trayectoria $d\vec{r}$ de la partícula, al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento:
>
> $$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (232)$$

La figura 93 muestra un esquema de las magnitudes involucradas en la definición de trabajo.

Trabajo

Habitualmente se utiliza el símbolo W para el trabajo, de la palabra inglesa *work*.

Figura 93

Figura 93

Una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve por la trayectoria representada, de la cual $d\vec{r}$ es un elemento.

El trabajo es una magnitud escalar obtenida a partir de dos magnitudes vectoriales. Si sumamos contribuciones infinitesimales como la (232) para todos los elementos de la trayectoria sobre la cual actúa la fuerza (que puede depender del punto donde se aplica), obtendremos el **trabajo finito** que hace la fuerza sobre la partícula.

> El trabajo que hace una fuerza que actúa entre los puntos *a* y *b* de la trayectoria (definidos por los vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respectivamente) se llama **trabajo finito** y se representa:
>
> $$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (233)$$

Una integral como la de la ecuación (233) se denomina *integral de línea*, porque es la integral de un producto escalar de dos vectores en que el elemento de integración es un diferencial de línea que describe la trayectoria de la par-

tícula. Luego, podemos **leer la expresión del trabajo**, ecuación (233), de la manera siguiente.

La integral de línea de la fuerza entre dos puntos de la trayectoria de la partícula da el trabajo que hace la fuerza que actúa sobre la partícula entre estos puntos.

En el recuadro que hay en la actividad 2.8 os hemos recordado que el producto escalar de la ecuación (232) puede calcularse a partir de las componentes de los vectores fuerza y desplazamiento, que son, respectivamente:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \qquad d\vec{r} = (dx, dy, dz) \tag{234}$$

así:

$$dW = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \tag{235}$$

También puede calcularse el trabajo infitesimal que hace una fuerza a partir de la definición de producto escalar de dos vectores, como el módulo de cada factor multiplicado por el coseno del ángulo que forman:

$$dW = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cdot \cos\theta \tag{236}$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores fuerza y desplazamiento en cada punto (figura 93).

Letra griega θ

θ es la letra griega theta y se lee "teta".

Cuando se escribe de esta manera, como la ecuación (236), se ve más claro que la definición de trabajo implica que no se hace trabajo, $dW = 0$, en uno de los tres casos siguientes:

- cuando no se aplica ninguna fuerza, $\left|\vec{F}\right| = 0$,
- cuando el punto de aplicación de la fuerza no se mueve, $\left|d\vec{r}\right| = 0$,
- cuando estos dos vectores (fuerza y desplazamiento de su punto de aplicación) son perpendiculares ($\theta = \pi/2$; $\cos\theta = 0$).

Por otro lado, como la componente de la fuerza paralela al desplazamiento de la partícula, $F_{//}$, puede calcularse de la manera siguiente (vegeu la figura 94):

Componente de un vector en una dirección

Si un vector tiene una proyección no nula en una dirección del espacio determinada, podemos decir que tiene una componente en esta dirección.

En caso contrario, el vector es perpendicular a esta dirección del espacio.

$$F_{//} = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\theta \tag{237}$$

entoces las expresiones (232) y (233) se convierten en:

$$dW = F_{//} \cdot dr \tag{238}$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F_{//} \cdot dr \qquad (239)$$

donde *dr* es módulo del elemento de trayectoria, el vector $|d\vec{r}|$.

Figura 94

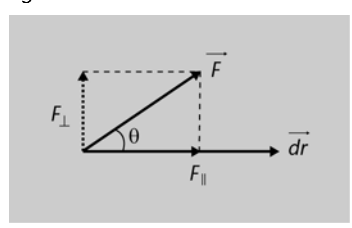


Figura 94

Componentes de una fuerza en la dirección del desplazamiento, $F_{//}$, y perpendicular al desplazamiento, $F_\perp$. $F_{//}$ es la componente de la fuerza paralela a la trayectoria, es decir, la proyección de la fuerza sobre la trayectoria de la partícula.

Por lo tanto, una fuerza sólo hace trabajo si está dirigida durante el desplazamiento o, al menos, si la fuerza tiene una componente no nula en la dirección del desplazamiento (figura 94): la componente $F_{//}$ hace trabajo, pero no lo hace la componente $F_\perp$.

En el caso particular que fuerza y desplazamiento sean paralelas y en el mismo sentido en todo momento, $F_{//} = F$ y el trabajo hecho por la fuerza será el máximo posible:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F \cdot dr \qquad (240)$$

El hecho de que se pueda aplicar una fuerza sin hacer ningún trabajo si no hay movimiento en la dirección de la fuerza, es diferente del significado informal que tiene el término *trabajo* en los usos cotidianos. En términos de la física, una persona que sostiene un paquete sin moverse no hace ningún trabajo, porque la fuerza que aplica no se desplaza, $d\vec{r} = 0$. Si se aplica una fuerza y se desplaza en sentido vertical sí que hace trabajo (figura 95a). También se hace trabajo si la fuerza se desplaza en una dirección oblicua (figura 95b).

Pero tampoco se hace trabajo si aplicamos una fuerza y el punto de aplicación se deplaza en una dirección perpendicular a la fuerza (figura 95c). Por ejemplo, si levantamos un libro, sí que hacemos trabajo (en contra del campo gravitatorio), pero si movemos el libro horizontalmente no hacemos trabajo porque la fuerza aplicada es en cada momento vertical y contraria al peso y, por lo tanto, perpendicular al desplazamiento horizontal.

Figura 95

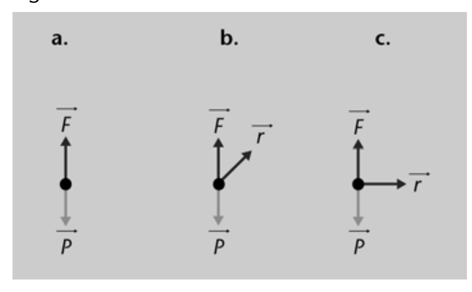


Figura 95

La fuerza $\vec{F}$ mueve una partícula en una dirección determinada y puede hacer un trabajo en contra del campo gravitatorio.

a. En un desplazamiento vertical, la fuerza aplicada sí hace trabajo.

b. En el desplazamiento oblicuo, también.

c. En el desplazamiento horizontal, no hace trabajo.

Campos de fuerzas

Un campo de fuerzas es una región del espacio donde actúan fuerzas.

Hemos dicho que movemos el objeto en el campo gravitatorio terrestre. El concepto de campo de fuerzas es muy importante en la física moderna.

Hablamos de campo de fuerzas porque en cada punto del espacio donde ponemos una partícula de masa *m*, ésta es sometida a la fuerza de atracción terrestre, la fuerza de su peso, *mg*.

Vamos a ver con más detalle el concepto de *campo* en los módulos de electrostática y magnetostática.

En resumen, sólo se hace trabajo si se aplica una fuerza y ésta tiene una componente en la dirección del movimiento (o, alternativamente, si se produce un desplazamiento en la dirección de la fuerza).

Actividad 5.4. Trabajo sobre la Luna

Supongamos que la Luna recorre en todo momento una trayectoria circular alrededor de la Tierra. ¿Qué trabajo hace la fuerza gravitatoria terrestre sobre la Luna?

Solución

La fuerza gravitatoria terrestre no hace ningún trabajo, porque la fuerza es radial (centrípeta) y el movimiento es circular, perpendicular a la fuerza (figura 96).

Figura 96

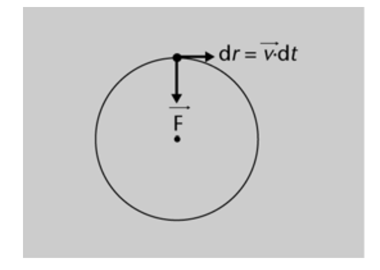


Figura 96

Trayectoria circular de la Luna alrededor de la Tierra y fuerza de atracción terrestre sobre la Luna. Esta fuerza no hace ningún trabajo porque fuerza y desplazamiento son perpendiculares en todos los puntos (aun así, la fuerza gravitatoria sí acelera la Luna).

Por lo tanto, una fuerza puede acelerar una masa, pero puede no hacer ningún trabajo, como en el caso de la órbita lunar (figura 96). En el caso de la figura 95c no hay fuerza neta ni, por lo tanto, aceleración de la masa.

Observemos también que sobre la Luna no actúa más que una fuerza, la de atracción terrestre, y que esta fuerza centrípeta es la que la mantiene en órbita alrededor de la Tierra (si queremos ser estrictos, de hecho, todos los cuerpos del universo contribuyen a la fuerza que actúa sobre la Luna, pero consideraremos sólo el sistema aislado Tierra-Luna).

Ahora que ya sabemos calcular el trabajo que puede hacer una fuerza, es útil calcular el ritmo al que se hace este trabajo.

5.2.1. Potencia

Desde el ejemplo con el que abrimos el curso en el apartado 1, el de la persona que sube paquetes por unas escaleras, tenemos pendiente ver cómo caracteri-

zar el esfuerzo que se hace por unidad de tiempo. Puede hacerse un mismo trabajo en un tiempo determinado o en el doble de este tiempo, por ejemplo.

Una vez definido el concepto de trabajo, aparece la necesidad de medir el ritmo al que se hace este trabajo y por esto se introduce la magnitud **potencia**.

La **potencia** es el trabajo que se desarrolla por unidad de tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (241)$$

La unidad de potencia en el Sistema Internacional es el vatio, simbolizado por W.

James Watt

La denominación de la unidad de medida *vatio* es en honor de este matemático e inventor escocés (Greenock, Escocia, 1736 - Handsworth, Inglaterra, 1819), que experimentó con la máquina de valor. Las mejoras que introdujo fueron claves para el desarrollo de esta tecnología y de la revolución industrial.

La expresión (241) permite calcular la potencia que se desarrolla en cada instante, o potencia instantánea.

En un proceso gradual de definición de la magnitud potencia se debería empezar por introducir la potencia media que se desarrolla durante un intervalo de tiempo determinado. Esto lo hacemos definiendo la potencia como el trabajo que se hace por unidad de tiempo en este intervalo:

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (242)$$

y después, hacer el paso al límite para hablar de potencia instantánea, como se ha definido en la ecuación (241). Como ya hemos aprendido este proceso de definición de magnitudes (lo hemos utilizado para definir las magnitudes velocidad y aceleración), no es necesario repetirlo.

Y ¿en qué unidades se mide esta nueva magnitud que hemos introducido, la potencia? Ya hemos visto en diversas ocasiones cómo obtener las unidades a partir de la definición de la magnitud. En la actividad siguiente lo volveremos a hacer.

Símbolos i magnitudes

Ya somos conscientes de que los símbolos expresan aquello que se dice en el contexto. Así, podemos ver la letra P referida a magnitudes distintas: P puede ser el momento lineal de un conjunto de partículas, puede ser la magnitud *peso* o, como en la ecuación (241), puede referirse a una potencia.

En cada caso debe prestarse atención al significado de los símbolos cuando interpretamos el significado de una fórmula o cuando la aplicamos. Si este significado no queda claro por el contexto, se debe explicitar.

Si vemos escrito, por ejemplo:

10 g

se trata de 10 gramos. Pero si vemos:

$$10g$$

se trata de una aceleración 10 veces superior a la de la gravedad.

James Prescott Joule

La denominación de la unidad de medida *julio* es en honor de este científico inglés (Salford, Inglaterra, 1818 – 1889), que contribuyó al estudio de las transformaciones energéticas que ocurren en procesos físicos.

Actividad 5.5. Julio y vatio

Definid la unidad SI de trabajo, 1 julio = 1 J, la unidad SI de potencia, 1 vatio = 1 W, y uno de sus múltiples, 1 kW (un "kilovatio").

Solución

En la relación 232 o la 238:

$$dW = F_{//}dr \tag{243}$$

podemos tomar un valor unitario para cada una de las magnitudes que intervienen. Si denominamos *julio* a la unidad de trabajo, lo definiremos como el trabajo que se hace cuando una fuerza de 1 N mueve el punto de aplicación una distancia de 1 m en la misma dirección que el desplazamiento de la partícula:

$$1 \text{ julio} = 1 \text{ newton} \cdot 1 \text{ metro} = 1 \text{ newton metro} \tag{244}$$

Simbólicamente:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ N m} \tag{245}$$

Análogamente, si escribimos la unidad para cada una de las magnitudes que aparecen en la definición (241) de potencia, obtenemos:

$$1 \text{ W} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}} = 1\frac{\text{J}}{\text{s}} \tag{246}$$

Por lo tanto, un vatio es la potencia que se desarrolla cuando se hace un trabajo de un julio por segundo.

1 kW será la potencia equivalente a 1.000 julios por segundo:

$$1 \text{ kW} = 1.000 \text{ W} = \frac{1.000 \text{ J}}{1 \text{ s}} \tag{247}$$

o equivalente a un trabajo de 1 julio cada milisegundo, por ejemplo:

$$1 \text{ kW} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ ms}} = 1.000\frac{\text{J}}{\text{s}} \tag{248}$$

Vamos a hacer el cálculo de trabajo y de potencia.

Actividad 5.6. Cálculo de potencia

Subimos una masa de 3,0 kg a una altura de 3,0 m en 1,5 s. ¿Qué potencia hemos desarrollado? Comparadla con la potencia que proporciona una bombilla eléctrica doméstica típica.

Solución

Para levantar un objeto sin acelerarlo debemos ejercer una fuerza igual y contraria a su peso, $\vec{F} = -\vec{P}$:

$$F_{//} = mg \tag{249}$$

Si el desplazamiento que hacemos tiene en todo momento la dirección contraria a la fuerza que debemos vencer, el peso, la integral (233) o (239), es inmediata porque la fuerza es constante:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F_{//} \cdot dr = F_{//} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dr \tag{250}$$

El trabajo que hacemos es:

$$W = F_{//} \cdot h \tag{251}$$

y si tenemos en cuenta la expresión (249):

$$W = mgh \tag{252}$$

De esta manera, obtenemos, para los valores que da el enunciado:

$$W = 3{,}0\ \text{kg} \times 9{,}81\ \text{m/s}^2 \times 3{,}0\ \text{m} = 88{,}29\ \text{J} \tag{253}$$

La potencia media (ecuación 242) que se desarrolla en este tiempo es:

$$P = W/t = 88{,}29\ \text{J}/1{,}5\ \text{s} = 58{,}86\ \text{W} \tag{254}$$

un valor muy parecido a la potencia de una bombilla eléctrica típica tradicional (60 W).

La potencia mide el ritmo al que se hace trabajo. Un mismo trabajo puede desarrollarse en el tiempo de muchas maneras, y la potencia mide su evolución temporal. Si un sistema desarrolla una potencia $P(t)$, el trabajo que hace el sistema entre los instantes t_1 y t_2 es:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) \cdot dt \tag{255}$$

5.2.2. ¿Qué hemos aprendido?

- Hemos introducido el concepto físico de trabajo que hace una fuerza como la integral de la componente tangencial de la fuerza sobre la trayectoria de la partícula.
- Hemos visto que no todas las fuerzas hacen trabajo.
- Hemos definido también la potencia como el trabajo que hace un sistema por unidad de tiempo.
- Hemos definido el julio y el vatio.

Con la magnitud *trabajo* se evalúa el efecto de la fuerza aplicada durante la trayectoria de la partícula. Ahora vamos a ver qué efecto tiene este trabajo sobre la partícula en términos de su estado de movimiento o de la posición que ocupa en un campo de fuerzas.

5.3. El concepto de energía

Un término presente en la vida diaria y en debates científicos y sociales es el de *energía*. El término *energía* nos aparece aquí por primera vez en este curso. Este término se usa incorrectamente en muchos casos; es un concepto difícil y que conviene aprender a manejar con rigor. Hablaremos, en primer lugar, del concepto de energía cinética y a continuación introduciremos el concepto de energía potencial y sus propiedades.

En general podemos decir que la **energía** de un sistema es su capacidad para hacer trabajo.

Cuando un sistema hace un trabajo sobre otro, se produce una transferencia de energía entre ambos sistemas. Por ejemplo, cuando levantamos una maleta hacemos un trabajo que se convierte en energía potencial de la maleta: hemos transferido energía de nuestro cuerpo a la maleta. Y si la maleta cae al suelo, parte del trabajo se convierte en energía de movimiento de la maleta. Otra parte se convierte en el ruido que provoca el impacto, en la deformación de la maleta, etc.

5.3.1. Energía cinética

Cuando un objeto se mueve puede producir efectos sobre otros objetos. Por ejemplo, podemos utilizar el balanceo de una bola de acero para demoler un edificio. Para ayudar a describir procesos en los que intervienen cuerpos en movimiento conviene introducir el concepto de energía cinética, asociado al hecho que un cuerpo se mueve.

Denominamos **energía cinética**, E_c, de una partícula de masa m que se mueve a la velocidad $\vec{v}$ a la mitad del producto de la masa por el cuadrado de la velocidad:

$$E_c = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 \qquad (256)$$

Decimos, por lo tanto, que un objeto que se mueve, no sólo tiene una posición en el espacio, una masa, una velocidad y un momento lineal; sino que también tiene una energía, en forma de energía cinética. Simbólicamente, espacio, masa, velocidad, momento lineal y energía cinética se escriben, respectivamente: $\vec{r}$, m, $\vec{v}$, $\vec{p}$, E_c.

Recordemos de la actividad 2.8 que el producto escalar de un vector por él mismo coincide con el cuadrado del módulo del vector, porque un vector forma un ángulo 0° consigo mismo:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2 = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| = v \cdot v = v^2 \qquad (257)$$

Por lo tanto, la expresión (256) puede escribirse también en términos del cuadrado del módulo del vector velocidad:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \qquad (258)$$

Y ahora, como siempre que introducimos una nueva magnitud, nos preguntamos en qué unidades del Sistema Internacional se va a medir. También escribiremos la energía cinética de otra forma.

Actividad 5.7. Unidades de energía cinética y expresión de E_c en función del momento lineal

a) ¿En qué unidades se mide la energía cinética? ¿Qué será, entonces, una energía cinética unitaria?

b) Escribid la definición de la energía cinética en términos del momento lineal, en lugar de hacerlo en términos de la velocidad de la partícula, como aparece en la ecuación (256).

Solución

a) La unidad en la que se mide la magnitud energía cinética puede obtenerse, como siempre hacemos, dando el valor unitario a las magnitudes que intervienen en su definición, o en cualquier otra ecuación en la que aparezca. Así, de la ecuación (256):

$$[\textit{Energía cinética}] = [\frac{1}{2}]\ [m][v] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \quad (259)$$

donde no tenemos en cuenta la constante ½ porque se trata de un número sin dimensiones. Por lo tanto, la energía cinética se mide en kilogramos metro cuadrado por segundo al cuadrado.

Podemos ver que esta unidad coincide con la unidad de trabajo, el julio. En efecto, en la actividad 5.6 hemos calculado el trabajo que hace una fuerza igual y contraria al peso del objeto al desplazarse una distancia h en la dirección de la fuerza, ecuación (252):

$$W = F_{//} \cdot h = mgh \quad (260)$$

Las unidades en las que se mide cada factor son:

$$[W] = [mgh] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{m} \quad (261)$$

que coinciden con las de la energía cinética (ecuación 259). Entonces, la energía cinética puede medirse también en julios, o N · m.

Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (256), la energía cinética que tiene una masa de un kilogramo que se desplaza a una velocidad de un metro por segundo es E_c = 0,5 J, medio julio.

Un julio es la energía cinética que tiene, por ejemplo, una masa de 2 kg que se mueve a 1 m/s.

b) Si recordamos que $\vec{p} = m\vec{v}$, ecuación (226), podemos hacer aparecer el producto $m\vec{v}$ en el numerador de la energía cinética si multiplicamos y dividimos la expresión (256) por la masa de la partícula:

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{(m\vec{v})^2}{m} \quad (262)$$

y si sustituimos el producto $m\vec{v}$ por el momento lineal obtenemos:

$$E_c = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad (263)$$

donde p es el módulo del momento lineal y hemos utilizado el resultado:

$$\vec{p}^2 = p^2 \quad (264)$$

análogamente a la ecuación (257).

La energía cinética depende sólo de la masa y de la velocidad o del momento lineal de la partícula.

Un objeto en movimiento tiene energía cinética, pero ésta desaparece si nos ponemos en el sistema de referencia en el que el objeto está en reposo. Por lo

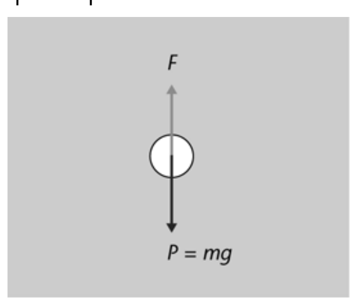
tanto, el valor de la energía cinética de un objeto depende del sistema de referencia desde el que se calcula. Esto es consecuencia del hecho de que la velocidad de un objeto es una magnitud relativa, que depende del sistema de referencia desde el que se observa el movimiento.

Antes de ver la relación que existe entre energía cinética y trabajo, introduciremos el concepto de energía potencial, que mide la energía que tiene un cuerpo en función de la posición que ocupa en un campo de fuerzas.

5.3.2. Energía potencial gravitatoria

Para levantar un cuerpo a cierta altura, la fuerza que se debe ejercer en cada momento es igual y opuesta al peso del cuerpo (figura 97).

Figura 97. Peso de un cuerpo y fuerza aplicada para levantarlo



Cuando levantamos un cuerpo en la dirección vertical aplicamos una fuerza igual y contraria a la de la gravedad; esta fuerza aplicada se desplaza verticalmente y, por lo tanto, hacemos trabajo en contra de la gravedad; decimos que el cuerpo gana energía potencial gravitatoria.

> La energía potencial que gana el objeto es, por definición, igual al trabajo que hemos hecho.

Como la fuerza que aplicamos es constante en el caso de levantar objetos, el trabajo que hacemos al levantar una masa m a una altura Δh es el producto de la fuerza aplicada por el desplazamiento vertical:

$$\Delta E_p = F \cdot \Delta h \qquad (265)$$

y como la fuerza es igual al peso, en módulo:

$$\Delta E_p = mg \cdot \Delta h \qquad (266)$$

Esta relación es la misma que la de la ecuación (252) o (260).

En el campo gravitatorio terrestre un cuerpo de masa m que se ha desplazado a una altura Δh, ha ganado una energía potencial ΔE_p dada por la expresión (266).

De esta manera, si dejamos un objeto encima de un armario hemos hecho un trabajo para elevarlo, que se almacena en forma de energía potencial del objeto. Y si este objeto cae, la energía potencial que se ha almacenado en el objeto puede hacer un trabajo: puede ejercer, por ejemplo, una fuerza sobre otro objeto y deformarlo o romperlo. O, en otro ejemplo, el trabajo que se hace al elevar agua a una determinada altura se convierte en energía potencial del agua; si dejamos caer el agua, la energía potencial puede convertirse en el movimiento de las ruedas de un molino o en el movimiento de las turbinas generadoras de energía eléctrica.

La energía potencial tiene la misma unidad que el trabajo y que la energía cinética, el julio (J), porque la hemos definido en términos de trabajo.

5.3.3. Energía potencial, expresión general

Hemos introducido el concepto de energía potencial en el caso gravitatorio sencillo en el que las partículas están cerca de la superficie terrestre y su peso es constante en todos los puntos del espacio donde colocamos los objetos.

En el caso más general de que sobre una partícula actúe una fuerza que puede tener un valor diferente en cada punto del espacio, decimos que la partícula está inmersa en un campo de fuerzas. Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando una nave espacial viaja de la Tierra a la Luna; sobre la nave actúa una fuerza diferente en cada punto del trayecto, la resultante de las fuerzas gravitatorias terrestre y lunar, que atraen la nave en dirección a la Tierra y a la Luna, respectivamente.

Algunos campos de fuerzas tienen la propiedad de que el trabajo que hacen las fuerzas del campo entre dos puntos cualesquiera no depende del camino por el que se desplace la partícula. En este caso, se habla de campos conservativos. El campo gravitatorio es un ejemplo de campo de fuerzas conservativas. En el subapartado 5.3.7 profundizaremos más en esta cuestión.

La definición general del concepto de energía potencial es la siguiente.

La **variación de la energía potencial** de una partícula entre dos puntos es igual al trabajo de las fuerzas conservativas, cambiado de signo, que estas fuerzas hacen sobre la partícula entre estos dos puntos.

Es una relación **energía potencial-fuerzas del campo**:

$$\Delta E_{p\ a \to b} = -W_{fuerzas\ conservativas} \tag{267}$$

Por lo tanto, el trabajo que hace una fuerza conservativa sobre una partícula en un recorrido cualquiera entre *a* y *b* es igual a la disminución de la energía potencial del sistema, $W_{fuerzas\ conservativas} = -\Delta E_{p\ a \to b}$.

En la ecuación (267) hemos utilizado el símbolo de **incremento de energía potencial** ΔE_p:

$$\Delta E_{p\ a \to b} = E_{pb} - E_{pa} \tag{268}$$

es decir, el incremento de energía potencial es la diferencia entre el valor de la energía potencial en el punto final en que se sitúa la partícula y su valor en el punto inicial.

Incremento de una magnitud, Δf

El incremento de una magnitud f, Δf (que se lee "delta efe"), entre un punto *a* y un punto *b* es la diferencia entre el valor de esta magnitud en el extremo final del intervalo menos el valor en el extremo inicial:

$$\Delta f = f_b - f_a$$

Figura 98

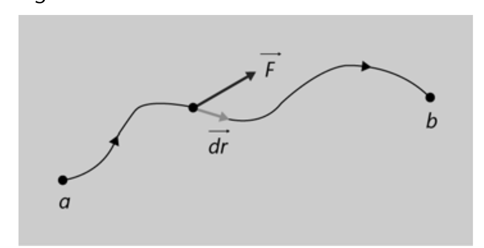


Figura 98

Una fuerza $\vec{F}$ hace trabajo para trasladar una partícula del punto *a* al *b* en contra de las fuerzas del campo. $d\vec{r}$ es un elemento de trayectoria. La energía potencial de la partícula ha aumentado en $\Delta E_{p\ a \to b}$.

Podemos expresar también el incremento de energía potencial en términos de las fuerzas que aplicamos si movemos la partícula en un campo de fuerzas. Como la fuerza que debemos ejercer para mover una partícula sin acelerarla en un campo de fuerzas es igual y contraria a la fuerza que ejerce el campo (véase la figura 97), podemos decir que existe una relación **energía potencial-fuerza aplicada**.

Campo de fuerzas

Podéis pensar en un campo de fuerzas como en una zona del espacio en el que existe una fuerza aplicada a cada punto. En el módulo de electrostática incidiremos más en este concepto.

> La energía potencial de una partícula que está en presencia de un campo de fuerzas conservativo aumenta en una cantidad ΔE_p entre dos puntos *a* y *b*, igual al trabajo que hacemos para mover la partícula (sin acelerarla) desde el punto *a* al punto *b* en contra de las fuerzas del campo:
>
> $$\Delta E_{p\ a \to b} = W_{contra\ el\ campo} \tag{269}$$

Si hacemos un trabajo $W_{contra\ el\ campo}$ en contra del campo de fuerzas en el que está la partícula, la energía potencial de la partícula aumenta en una energía igual al trabajo que ha hecho la fuerza.

Pero si es el campo de fuerzas conservativo el que mueve la partícula entre estos dos puntos, entonces la energía potencial disminuye en este valor, ecuación (267).

Decimos, pues, que cuando se hace un trabajo, la energía se transforma de un tipo a otro. La cantidad de energía que se transforma en energía potencial en un proceso como el descrito en la ecuación (267) es igual a la cantidad de trabajo que se hace. Veremos en el subapartado 5.5.2 que la energía potencial puede convertirse también en cinética y viceversa.

Explícitamente, si $\vec{F}_{campo}$ es la fuerza que ejerce el campo de fuerzas conservativo sobre una partícula situada en un punto, entonces la fuerza que ejerceremos en contra del campo para mover la partícula será $\vec{F} = -\vec{F}_{campo}$, y escribimos la definición (269) de diferencia de energía potencial de la manera siguiente:

$$\Delta E_{p\ a \to b} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{270}$$

si $\vec{r}_1$ es el vector de posición de la partícula en el punto a y $\vec{r}_2$ en el punto b.

En la expresión anterior aparece la fuerza aplicada. También podemos escribirla en función de la fuerza que ejerce el campo de fuerzas conservativo:

$$\Delta E_{p\ a \to b} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{campo} \cdot d\vec{r} \tag{271}$$

La relación (271) es la misma que la (267) y en ella se ha escrito explícitamente la expresión del trabajo de las fuerzas del campo conservativo.

¿Por qué se dice en la definición (269) de incremento de energía potencial que el trabajo de la fuerza externa se debe hacer “sin acelerar” la partícula? Porque si aplicamos una fuerza igual y opuesta a la que ejerce el campo de fuerzas sobre la partícula, entonces la fuerza total que actúa sobre la partícula es nula y, por lo tanto, la partícula no se acelera en el desplazamiento entre ambos puntos, según afirma la segunda ley de Newton.

Vamos a verlo de otra manera, para el caso de las fuerzas gravitatorias.

Está claro que levantar un objeto a una altura determinada implica aplicar una fuerza para levantarlo y, por lo tanto, hacer un trabajo. Si la fuerza aplicada compensa exactamente el peso, entonces la fuerza total que actúa sobre la partícula es nula. Pero durante el desplazamiento entre a y b podemos ejercer una fuerza mayor que el peso, con lo que la fuerza neta que actúa sobre la partícula no será nula, y ésta se acelerará, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Esto significa que llegará a la altura h con una determinada velocidad, es decir, con una determinada energía cinética. En la altura h, pues, tendrá tanto energía cinética como potencial, como consecuencia del trabajo que hacen las fuerzas.

Por el contrario, si la fuerza que ejercemos compensa exactamente el peso, el cuerpo se moverá del punto inicial al final sin acelerarse. Sobre el cuerpo no

actuará ninguna fuerza neta y el trabajo que haremos será el menor posible, porque todo el trabajo que hacemos se convertirá en energía potencial y ninguna fracción del mismo se convertirá en energía cinética de la partícula.

Una condición esencial para poder definir el concepto de energía potencial, y que hace que este concepto sea útil, es que cuando calculamos el trabajo hecho contra las fuerzas del campo, ecuación (269) o (270), el resultado que obtengamos sólo debe depender de las coordenadas de los puntos inicial y final de camino que hemos recorrido.

Además, este camino puede ser arbitrario, es decir, al hacer la integral que da el trabajo no podemos obtener resultados diferentes según el camino que escojamos. Cuando ocurre esto, decimos que el campo de fuerzas en el que se encuentra la partícula es **conservativo** y el concepto de energía potencial es útil.

Volveremos sobre esta idea más adelante. Antes, haremos una consideración sobre el camino de integración que hemos utilizado para llegar al resultado de la ecuación (266) y, a continuación, hablaremos de algunas propiedades generales del concepto de energía potencial.

5.3.4. Energía potencia gravitatoria y camino de integración

La energía potencial gravitatoria de un objeto de masa m que está a una altura Δh tiene la forma expresada en la ecuación (266), $\Delta E_p = mg\Delta h$. Para efectuar el cálculo de la expresión anterior hemos supuesto que desplazamos el objeto verticalmente, (figura 99a). Pero también podemos utilizar cualquier trayectoria, como las de las figuras 99b o 99c, y el resultado sería el mismo, $mg\Delta h$. No haremos la demostración general de esta propiedad de los campos conservativos, pero lo vamos a comprobar para un caso particular sencillo.

Figura 99

a. b. c.
Δh α

Figura 99

Tres de las posibles maneras de ir del plano inferior al plano superior, separados una distancia Δh:

a. un camino vertical;
b. un camino oblicuo;
c. un camino arbitrario.

Actividad 5.8. Cálculo de la energía potencial gravitatoria

Repetid el cálculo de la expresión (266) para una trayectoria oblicua como la de la figura 99b.

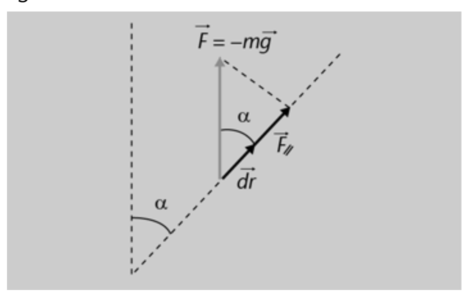
Solución

En el caso de la trayectoria de la figura 99b, el camino que recorremos es más largo que para el caso de ascenso vertical:

$$camino = \frac{\Delta h}{\cos\alpha} \quad (272)$$

La fuerza que debemos aplicar es la que contrarresta el peso del objeto, $\vec{F} = -m\vec{g}$. Para calcular el trabajo que hacemos al levantar el objeto, de acuerdo con la ecuación (270), debemos saber qué vale la proyección de esta fuerza sobre el camino que seguimos (figura 100).

Figura 100. Proyección de la fuerza que hacemos sobre el objeto en la trayectoria oblicua de la figura 99b



Sólo la proyección de la fuerza paralela al camino, $F_{//}$, hace trabajo:

$$F_{//} = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha = mg \cdot \cos\alpha \quad (273)$$

Por lo tanto, el trabajo que hacemos si seguimos el camino oblicuo es, ecuación (269):

$$\Delta E_{p_{1\to 2}} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_{//} \cdot dr \quad (274)$$

y si sustituimos la expresión (273) obtenemos:

$$\Delta E_{p_{1\to 2}} = \int_1^2 mg \cdot \cos\alpha \cdot dr = mg \cdot \cos\alpha \int_1^2 dr \quad (275)$$

Hemos sacado los factores constantes de la integral, y la integral es el camino oblicuo que seguimos, ecuación (272):

$$\Delta E_{p_{1\to 2}} = mg \cos\alpha \frac{\Delta h}{\cos\alpha} \quad (276)$$

Hemos obtenido el mismo resultado (266) que si vamos por el camino más corto:

$$\Delta E_{p1\to 2} = mg\Delta h \quad (277)$$

En el ejemplo anterior hemos visto que puede hacerse el mismo trabajo si aplicamos una fuerza mayor, mg, para un camino corto, Δh, o una fuerza menor, $mg \cos\alpha$, para un camino más largo, $\Delta h/\cos\alpha$. Es lo mismo que conseguimos si subimos un objeto por un plano inclinado: hacemos menos fuerza para empujarlo, pero el camino es más largo. En definitiva, hacemos el mismo trabajo en ambos casos (si suponemos que no existe rozamiento en el movimiento por el plano inclinado), y la energía potencial del objeto en el punto superior del plano inclinado es la misma.

Hemos comprobado en un caso sencillo que el trabajo que hacemos al levantar un objeto por un camino vertical o por un camino inclinado es el mismo, y puede demostrarse que el resultado es siempre el mismo, independientemente del camino que sigamos, como el de la figura 99c, por ejemplo. En el

camino de la figura 99c hay partes del camino que son de subida, y nosotros hacemos el trabajo, mientras que otras partes del camino son de bajada, y es el campo gravitatorio el que hace el trabajo; estas contribuciones tienen signo contrario.

En resumen, un camino cualquiera que vaya del plano 1 al plano 2 que está a una distancia Δh del primero, siempre dará como resultado que la diferencia de energía potencial de una masa m entre los dos planos situados a una altura relativa Δh es $mg\Delta h$.

En la expresión $mg\Delta h$, que habíamos obtenido efectuando el cálculo por el camino más directo, vertical (figura 99a), ya podía intuirse que sólo importa la altura final de la partícula, y no el camino por el que se llega, porque el resultado sólo depende de Δh.

Una vez visto que la diferencia de energía potencial en el campo gravitatorio no depende del camino, conviene que analicemos aún más el concepto de energía potencial, porque es muy útil y se aplica en muchos campos de la física.

5.3.5. Discusión del concepto de energía potencial

A partir de la discusión que hemos expuesto para la energía potencial gravitatoria vamos a comentar cuatro propiedades generales del concepto de energía potencial, que son válidas para cualquier campo de fuerzas (gravitatorio, eléctrico, elástico, etc.).

1) Los campos de fuerzas se dividen en conservativos y no conservativos.

Son campos conservativos aquellos en los que el trabajo que se hace para llevar una partícula entre dos puntos en contra de las fuerzas del campo sólo depende de estos puntos y no del camino que se recorre entre ambos.

Por lo tanto, sólo en el caso de campos conservativos puede definirse el concepto de diferencia de energía potencial, porque en caso contrario no obtendremos un valor único como resultado del cálculo (269).

2) El origen de la energía potencial es siempre arbitrario.

Hablamos de origen de energías para referirnos a la situación en la que la energía toma el valor nulo. Veamos cómo se aplica esta idea en el caso de la energía potencial o de la energía cinética.

La definición de la magnitud energía potencial se hace en términos de trabajo, y este trabajo incrementa la energía potencial. Por lo tanto, a partir de la definición de energía potencial (269), podemos calcular la diferencia:

$$E_{p\ final} - E_{p\ inicial} = \Delta E_p \qquad (278)$$

Pero la definición de energía potencial no nos dice cómo fijar un origen para el valor de esta energía. En cada problema podemos escoger el origen de energías potenciales que más nos convenga. En la actividad siguiente vamos a ver qué efecto tiene la elección del origen de la energía potencial.

En el caso de la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, el origen de energías es claro: la energía cinética nunca puede ser negativa, porque la masa es una magnitud definida como positiva (no existen masas negativas) y la velocidad aparece elevada al cuadrado en la expresión de E_c. Por lo tanto, la energía cinética sólo puede ser nula o positiva, y es nula si la partícula está en reposo, $v = 0$:

$$E_c = 0 \tag{279}$$

Este será, pues, el origen de la energía cinética.

En el caso de la energía potencial podemos escoger el origen en el punto que queramos, porque en un proceso sólo tendrá sentido la variación que ha ocurrido en la energía potencial del sistema. Por otra parte, las energías potenciales sí pueden ser negativas, como veremos en la actividad siguiente.

Actividad 5.9. Origen de los valores de la energía potencial

En la expresión $E_p = mgh$, ¿cuál es el origen que se ha escogido implícitamente para la energía potencial gravitatoria?

¿Pueden ser negativas estas energías potenciales?

Solución

El origen de una magnitud es el valor cero de esta magnitud. Por ejemplo, una carretera empieza por el kilómetro cero; una cuenta bancaria está a cero si no tenemos ni debemos dinero; un eje de coordenadas tiene un punto cero y valores positivos y negativos a ambos lados del cero.

En el caso más simple de la energía potencial gravitatoria, $E_p = mgh$, el origen se halla en el punto $h = 0$, porque anula la energía: $E_p = 0$. Hemos tomado la posición de partida de la masa que levantamos a la altura h como el origen de alturas y, por lo tanto, de energías potenciales gravitatorias.

Pero un objeto puede estar en una posición inferior a la altura $h = 0$ que hemos tomado como origen y, por lo tanto, $h < 0$ y la energía potencial será negativa. Es el caso, por ejemplo, de que escojamos el suelo de la habitación como origen de energías potenciales. Si el objeto se coloca encima de un armario de altura H, su energía potencial es mgH. Pero si el objeto se cae por el balcón, cuando esté a una altura de $-h_1$ metros debajo del balcón, tendrá una energía potencial negativa, $-mgh_1$.

Como conclusión:

- Si el objeto está en el suelo, tiene energía potencial nula si hemos tomado el suelo como origen de energías potenciales.
- Si el objeto está encima del armario, tiene energía potencial positiva (y vale mgH); coincide con el trabajo que hemos hecho para colocarlo.
- Si el objeto está a una altura $-h_1$ por debajo del suelo, tiene energía potencial negativa (y vale $-mgh_1$). Es el trabajo que ha hecho el campo de fuerzas conservativo (no nosotros) para llevarlo.

3) A veces hablamos del valor de la energía potencial en un punto.

A veces nos referimos al valor de la energía potencial en un punto, y no a una diferencia de energía potencial. Entonces queda implícito que nos referimos al valor de la energía potencial en aquel punto con respecto al valor cero que asignamos al origen de energías potenciales.

4) En la expresión de la energía potencial aparecen tres magnitudes que representan la fuente del campo, la partícula y la geometría de la situación.

En el caso particular de la energía potencial gravitatoria, $E_p = mgh$, el campo aparece a través de g, la partícula, a través de m, y la geometría de la situación, a través de la distancia, h.

Conviene resaltar que el concepto de energía potencial siempre se refiere a un sistema, no a un cuerpo. La energía potencial gravitatoria de un libro, por ejemplo, es la del conjunto libro-Tierra. No tiene sentido hablar de la energía potencial gravitatoria de un libro sin la presencia de la Tierra.

Por otro lado, a veces resulta útil disponer de una magnitud en la que el efecto de un campo de fuerzas pueda calcularse sin referencia a la partícula que sufre el efecto del campo. Esta magnitud se definirá en el apartado siguiente.

En resumen, y teniendo presente lo que se ha dicho en este apartado, $\Delta E_p > 0$ cuando hacemos el trabajo nosotros, en contra del campo, y $\Delta E_p < 0$ cuando el trabajo lo hace el campo de fuerzas conservativo.

5.3.6. El potencial gravitatorio

En el caso de campos gravitatorios, la magnitud activa es la masa; es la propiedad del cuerpo que sufre los efectos de la fuerza. En el caso de campos eléctricos, la magnitud activa será la carga eléctrica. A veces resulta conveniente definir una magnitud derivada de la energía potencial en la que no aparezca la magnitud activa.

Con este objetivo puede definirse la energía potencial por unidad de magnitud activa. Esta nueva magnitud se denomina *potencial*. A partir de la definición general de la energía potencial, la **diferencia de potencial gravitatorio** entre dos puntos se define de la manera siguiente:

$$\Delta V_{p\,1\to 2} = \frac{\Delta E_{p\,1\to 2}}{m} \tag{280}$$

Es decir (si recordamos cómo se leen los cocientes, subapartado 1.6.2), podemos exponer lo siguiente del potencial gravitatorio.

El **potencial gravitatorio** en un punto es la energía potencial por unidad de masa situada en este punto.

Podemos hablar de potencial en un punto de la misma manera que hablamos de energía potencial en un punto. Nos referiremos al potencial en un punto con respecto al valor de potencial cero que asignamos al origen de potenciales. El origen de energías potenciales y de potenciales es el mismo punto del espacio.

Vamos a analizar un poco más este concepto.

Actividad 5.10. Potencial

a) ¿Cuáles de las propiedades de la energía potencial gravitatoria (propiedades 1, 2 y 3 del subapartado 5.3.5) son aplicables a la magnitud potencial gravitatorio?

b) ¿En qué unidades se mide el potencial gravitatorio?

c) Calculad el potencial gravitatorio para el caso particular de la expresión (277).

Solución

a)

1) Sólo tiene sentido definir el potencial para campos conservativos, igual que la energía potencial.

2) El origen de potenciales es el mismo que el que se escoja para la energía potencial.

3) En el potencial aparecen el campo y la geometría, pero no la magnitud activa (la masa que recibe los efectos).

b) El potencial gravitatorio se mide en J/kg o también en m^2/s^2, si recordamos que $1\ J = 1\ kg{\cdot}m^2/s^2$, ecuación (261).

c) El **potencial gravitatorio con respecto al suelo** en un punto del espacio que está a una altura h es:

$$V = gh \qquad (281)$$

La importancia del concepto de potencial se verá mejor en la segunda parte de la asignatura, cuando hablemos de potencial electrostático.

Ahora pondremos el énfasis en una propiedad muy importante de los campos de fuerzas conservativos, relativa al trabajo que se hace en un recorrido cerrado.

5.3.7. Trabajo en un recorrido cerrado

Ya hemos dicho que el concepto de energía potencial (y el de potencial) sólo es útil cuando los campos de fuerzas son conservativos. Así ocurre en el caso de las fuerzas que no dependen del tiempo.

Un campo estacionario de fuerzas, es decir, un campo que no depende del tiempo, tiene una propiedad muy importante: el trabajo total que hacen las fuerzas del campo en un recorrido cerrado es nulo. Es decir, si el punto material se desplaza en este campo según una trayectoria cerrada, de manera que en su movimiento el punto vuelve a la posición inicial, el trabajo total que hacen las fuerzas del campo será nulo.

Figura 101

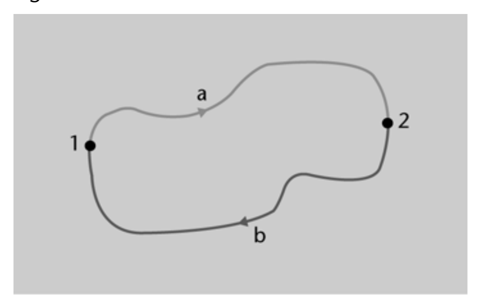


Figura 101

El camino **a** va del punto 1 al 2 y el camino **b** va del punto 2 al 1.

Esta propiedad es equivalente a otra que hemos utilizado como definición de campos conservativos: el trabajo que se hace en contra de las fuerzas del campo al trasladar la partícula de una posición a otra no depende del camino que se recorre (subapartado 5.3.5), y sólo viene determinado por las posiciones de los puntos inicial y final de la translación.

Insistimos en el hecho de que las fuerzas deben ser conservativas para que el concepto de energía potencial pueda definirse. Vamos a ver un ejemplo.

Actividad 5.11. Fuerzas de fricción y energía potencial

Si tenemos un libro encima de una mesa y lo queremos mover sobre la superficie aplicándole una fuerza con el dedo, esta fuerza debe ser infinitesimalmente mayor y contraria a la fuerza de fricción. Si ambas fuerzas son exactamente iguales y contrarias, el libro no se moverá.

Y por el hecho de aplicar una fuerza y desplazar el punto de aplicación en la dirección de la fuerza, estamos haciendo un trabajo.

Supongamos que trasladamos de esta manera el libro desde un punto A a un punto B determinados por dos caminos diferentes sobre la mesa. ¿Podremos hablar de diferencia de energía potencial $\Delta E_{pA \to B}$?

Solución

No puede definirse una energía potencial para un proceso en el que intervienen fuerzas de fricción, porque las fuerzas de fricción no son conservativas.

En efecto, si calculamos el trabajo que hacemos en contra de las fuerzas de fricción por dos caminos diferentes que van del punto A al B, y un camino tiene más longitud que el otro, el trabajo que haremos será diferente: cuanto más camino se recorra, más trabajo hay que hacer, porque la fricción siempre está presente y actúa en sentido contrario al movimiento. Por esto, la fuerza que debemos ejercer para superarla es una fuerza paralela al desplazamiento, y el trabajo resultante es siempre positivo.

5.3.8. ¿Qué hemos aprendido?

- La energía cinética es la que tiene un objeto por el hecho de estar en movimiento.

- La energía potencial es la que tiene un objeto en función de la posición que ocupa en un punto del espacio a causa de la interacción con otro cuerpo o con un campo de fuerzas.
- El trabajo que hacemos sobre una partícula aumenta su energía potencial, si las fuerzas que actúan son conservativas, ecuación (269).
- El potencial gravitatorio es una magnitud derivada de la energía potencial gravitatoria, y se refiere a la unidad de masa.
- El origen de energía potencial y de potencial es arbitrario.

Hemos discutido el concepto de energía potencial, que está asociado al cálculo del trabajo que hace la fuerza que actúa sobre la partícula en un campo de fuerzas conservativo, es decir, el trabajo que hace una fuerza conservativa.

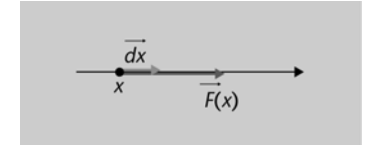
A continuación, vamos a ver que la energía cinética está asociada con el trabajo total, y no solamente con el que hacen las fuerzas conservativas.

5.4. El teorema del trabajo-energía cinética

Cuando una fuerza acelera una partícula, le cambia su velocidad. Podemos calcular el trabajo que hace la fuerza neta (o resultante) que actúa sobre una partícula y deducir una relación entre este trabajo y la variación de energía cinética que tendrá la partícula.

Aunque la deducción que veremos aquí puede hacerse, análogamente, en el caso general con magnitudes vectoriales en tres dimensiones, lo haremos en el caso más sencillo: un objeto que se mueve en una dimensión, por ejemplo a lo largo del eje *X*. Sobre el objeto actúa una fuerza *F* que puede ser variable, *F*(*x*) (figura 102). Calculamos el trabajo que hace esta fuerza si la aplicamos al objeto de manera continua entre dos puntos cualesquiera, *a* y *b*:

Figura 102. Fuerza variable que actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo de un eje



$$W = \int_a^b F(x)dx \tag{282}$$

Sabemos que si actúa una fuerza neta sobre una partícula, ésta se acelera. Por la segunda ley de Newton aplicada al caso de movimiento unidimensional, si la partícula tiene una masa *m*, la aceleración que adquiere en cada punto es:

$$a(x) = \frac{F(x)}{m} \tag{283}$$

Por lo tanto, podemos escribir el trabajo que hace la fuerza aplicada a la partícula de la manera siguiente:

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b ma(x)dx \tag{284}$$

y si recordamos que la aceleración es el cambio de velocidad por unidad de tiempo, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ y, en una dimensión, $a = dv/dt$, escribimos:

$$W = \int_a^b m \frac{dv}{dt} dx \qquad (285)$$

En un movimiento unidimensional la velocidad $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ sólo tiene una componente no nula, la componente en la dirección x, y $v = dx/dt$. Ahora hacemos el pequeño truco de desplazar en la ecuación (285) la diferencial de tiempo al segundo factor (recordad que, a efectos prácticos, una derivada también puede considerarse un cociente de diferenciales; por lo tanto, podemos manipular las magnitudes del cociente como si fuesen funciones). De esta manera obtenemos:

$$W = \int_a^b m \frac{dv}{dt} dx = \int_a^b m \cdot dv \frac{dx}{dt} \qquad (286)$$

y como la componente x de la velocidad es:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (287)$$

Resulta:

$$W = \int_a^b m \cdot dv \cdot v \qquad (288)$$

Cuando la masa es constante, la integral que queda es inmediata y vale:

$$W = m\int_a^b dv \cdot v = \frac{1}{2} mv^2 \Big|_a^b \qquad (289)$$

y de acuerdo con la regla de Barrow, que permite calcular integrales definidas, obtenemos:

$$W = \frac{1}{2} m\left(v_b^2 - v_a^2\right) \qquad (290)$$

Si tenemos en cuenta que el término $\frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética de la partícula que tiene una masa m y que se mueve a la velocidad v, ecuación (256), hemos llegado a:

$$W = \frac{1}{2} mv_b^2 - \frac{1}{2} mv_a^2 \qquad (291)$$

y si simbolizamos el incremento de energía cinética con el símbolo ΔE_c (la variación de la energía cinética entre los dos puntos a y b en los que se aplica la fuerza):

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} mv_b^2 - \frac{1}{2} mv_a^2 \qquad (292)$$

Regla de Barrow

Si la función F es una función primitiva de la función f, la integral definida de f entre dos puntos a y b es:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Recordad

$$\int_a^b x \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

finalmente podemos escribir:

$$W = \Delta E_c \quad (293)$$

Incremento de una magnitud

El incremento de una magnitud f entre un punto a y un punto b es la diferencia entre el valor de esta magnitud en el extremo final del intervalo menos el valor en su extremo inicial:

$$\Delta f = f_b - f_a$$

Como podéis ver, se indica con la letra griega delta mayúscula (Δ) y por eso se lee a veces como "delta de efe" en lugar de "incremento de efe".

El resultado que hemos obtenido se denomina **teorema trabajo-energía cinética** y se enuncia así: el trabajo total que hace la fuerza neta que actúa sobre una partícula durante la trayectoria que va del punto a al punto b se traduce en una variación de la energía cinética de la partícula entre estos puntos:

$$W = \Delta E_c = E_{c,b} - E_{c,a} \quad (294)$$

Si la fuerza, por ejemplo, frena la partícula, entonces W será negativo y la energía cinética final:

$$E_{c,b} = E_{c,a} + W \quad (295)$$

será menor que la energía cinética inicial:

$$E_{c,b} < E_{c,a} \quad (296)$$

Es el caso, por ejemplo, de una partícula que se mueve en el sentido positivo del eje X y la fuerza tiene el sentido contrario. Entonces, $F \cdot dx < 0$, es decir, para un incremento positivo de la variable x, $dx > 0$, la fuerza va en sentido contrario (figura 103).

Figura 103

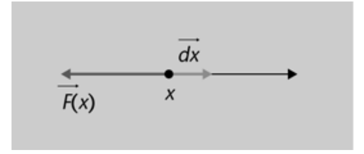


Figura 103

Una fuerza que se dirige en el sentido descendiente del eje X hace un trabajo negativo sobre una partícula que se mueve en el sentido positivo del eje X.

La expresión (294) expone que la energía cinética de una partícula aumenta en una cantidad que se corresponde exactamente con el trabajo que hace la fuerza neta que actúa sobre la partícula. Así, si $W > 0$, la partícula se moverá más rápidamente gracias al trabajo que hace la fuerza, es decir, gracias a la energía que le aporta la fuerza que actúa durante un desplazamiento. Si $W < 0$, la fuerza frena la partícula, que reduce su velocidad.

El resultado (294) no se limita a movimientos en una dimensión. Para un desplazamiento cualquiera de la partícula en el espacio entre los puntos a y b el teorema trabajo-energía cinética puede expresarse de la manera siguiente:

$$\int_a^b \vec{F}_{neta} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c \quad (297)$$

En general, cuando una fuerza actúa sobre una partícula, ésta se acelera y la fuerza puede hacer un trabajo: es lo que ocurre, por ejemplo, cuando tiramos de una persona que lleva patines. También podemos decir que un cuerpo se acelera, de manera que aumenta su velocidad, gana energía cinética. Existe una relación entre la **aceleración** (producida por una fuerza) y el **aumento de energía cinética** de un cuerpo.

La cantidad de energía cinética que gana una partícula es igual al trabajo que hace la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

El trabajo que calculamos con la expresión (297) es el trabajo neto, el trabajo que hace la fuerza neta que actúa sobre la partícula, y este trabajo se invierte íntegramente en aumentar la energía cinética de la partícula.

Por otra parte, cuando las fuerzas son conservativas, el trabajo que hacen las fuerzas del campo se traduce en una reducción de la energía potencial de la partícula, ecuación (267).

Por lo tanto:

1) El incremento de energía potencial es menos el trabajo de las fuerzas conservativas: $\Delta Ep = -W_{FC}$.

2) El incremento de energía cinética es el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre la partícula (ecuación 294): $\Delta Ec = W_t$.

Estos resultados generales pueden ayudarnos a entender qué ocurre cuando levantamos un objeto de masa m a una altura h y después lo dejamos caer libremente. Vamos a analizarlo.

Mientras levantamos un objeto verticalmente, aplicamos una fuerza contraria a su peso, $\vec{F} = -\vec{P}$. La fuerza total que actúa sobre el objeto es nula: $\vec{F} + \vec{P} = 0$. Según los enunciados anteriores, diremos que:

- el trabajo que hace la fuerza neta es nulo, y la energía cinética del objeto no varía cuando lo levantamos;

- el trabajo de la fuerza aplicada es mgh, y se convierte en energía potencial del objeto;

- visto de otra manera: el trabajo de las fuerzas del campo gravitatorio es negativo, $-mgh$, y, por lo tanto, la energía potencial de la partícula, que es $0 - (-mgh) = +mgh$, aumenta; obtenemos el mismo resultado que si consideramos la fuerza aplicada.

Debéis recordar lo que dijimos en el análisis posterior a la ecuación (271): que la fuerza aplicada es sólo infinitesimalmente mayor que el peso, mientras le-

vantamos el objeto sin acelerarlo. Si la fuerza aplicada fuera mayor que el peso, $\vec{F} + \vec{P} > 0$, entonces el objeto llegaría a la altura *h* con una determinada energía cinética, igual al trabajo de la fuerza neta.

En el proceso de caída libre del objeto desde la altura *h* sólo actúa la fuerza del campo conservativo y el trabajo que hace se convierte en energía cinética del objeto. Al mismo tiempo, este trabajo (positivo, porque la dirección de la fuerza y el desplazamiento coinciden en el sentido vertical y hacia abajo) reduce la energía potencial de la partícula. En el subapartado 5.5.2 volveremos sobre esta cuestión.

5.4.1. ¿Qué hemos aprendido?

- Una fuerza puede acelerar una partícula sin hacer trabajo.

- El trabajo que hace la fuerza neta que actúa sobre una partícula se invierte íntegramente en aumentar la energía cinética de la partícula.

- Hemos recordado, del subapartado anterior, que cuando las fuerzas son conservativas, el trabajo que hacen las fuerzas del campo se convierte en una reducción de la energía potencial de la partícula.

Acabamos de ver la relación entre el trabajo de las fuerzas que actúan sobre una partícula y los cambios en su energía cinética y potencial. Las fuerzas son tanto la fuerza aplicada como la debida al campo de fuerzas en el que se encuentre la partícula.

Asimismo, existen magnitudes físicas que no varían en determinadas condiciones, aunque se producen transformaciones en el sistema. Es el caso del momento lineal y de la energía total de un sistema aislado. Se dice que las magnitudes correspondientes "se conservan" en los procesos.

Veremos que las leyes de conservación de la mecámica tienen el origen en las leyes de Newton y pueden utilizarse como una forma alternativa de expresión de aquellas leyes y como herramienta de cálculo útil.

5.5. Leyes de conservación

Las tres leyes de Newton que permiten estudiar la dinámica de un sistema de partículas o de cuerpos materiales pueden reformularse también en forma de **leyes de conservación**. La aplicación de estas leyes a veces facilita el análisis de procesos físicos. Veremos ahora las leyes de conservación del momento lineal y de la energía.

5.5.1. Conservación del momento lineal

La tercera ley de Newton, en conjunción con la segunda, permite deducir el principio de conservación del momento lineal.

Supongamos que dos masas puntuales se mueven con una velocidad determinada, de manera que el momento lineal de cada partícula es, respectivamente, $m_1\vec{v}_1$ y $m_2\vec{v}_2$. Empezamos con la explicitación de la tercera ley, la ley de acción y reacción: la fuerza que ejerce una partícula sobre otra es igual a la fuerza que ejerce la segunda partícula sobre la primera:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{298}$$

Si suponemos que el sistema formado por las dos partículas es aislado (es decir, que no actúa ninguna fuerza externa sobre ninguna de las dos partículas), la fuerza total que actúa sobre el sistema de las dos partículas en conjunto es nula:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \tag{299}$$

La segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ nos permite escribir para cada partícula, la relación entre la fuerza y el cambio de velocidad que se produce por unidad de tiempo:

$$\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} \tag{300}$$

$$\vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2 = m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} \tag{301}$$

y si ahora tenemos en cuenta la expresión del momento lineal de cada partícula, podemos escribir cada fuerza de la manera siguiente; recordando la ecuación (228):

$$\vec{F}_1 = \frac{d}{dt}\vec{p}_1 \tag{302}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{d}{dt}\vec{p}_2 \tag{303}$$

Para el conjunto de las dos partículas la ecuación (299) resulta:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0 \tag{304}$$

Una magnitud que no varía con el tiempo tiene derivada temporal nula; por lo tanto, la ecuación (304) indica que:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = constante \tag{305}$$

donde la constante no depende del tiempo (si derivamos la expresión (305) con respecto al tiempo obtenemos la expresión (304)).

Hemos deducido (utilizando las leyes de Newton) la **ley de conservación del momento lineal** de un sistema de dos partículas.

> Si no actúa ninguna fuerza externa, la suma de los momentos lineales de las partículas del sistema es siempre constante.

La suma de los momentos lineales de las partículas de un sistema aislado es constante en todo momento, pase lo que pase en el sistema, sea cual sea la trayectoria de las partículas del sistema y las interacciones que pueda haber entre las dos partículas.

Esta **ley de conservación** puede deducirse igualmente **para un sistema** formado por un conjunto de partículas: si el sistema está aislado, es decir, si sobre él no actúan fuerzas exteriores, entonces la suma de los momentos lineales de las partículas del sistema es constante en todo instante:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = constante \tag{306}$$

Universalidad de la ley de conservación del momento lineal

La ley que expresa la ecuación (306) es una ley muy fundamental de la naturaleza, y sirve, por ejemplo, para detectar partículas subatómicas.

A esta constante se la llama **constante del movimiento**.

> Una constante del movimiento es el valor de una magnitud (momento lineal, energía total, etc.) que se conserva durante la evolución de un sistema.

Un ejemplo sencillo de sistema aislado es el formado por dos bolas de billar. La ley de conservación del momento lineal aplicada a las dos bolas en un proceso de colisión indica que el momento lineal es el mismo antes que después de la colisión. Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades de las bolas antes y $\vec{v}_1\,'$ y $\vec{v}_2\,'$ son las velocidades después de la colisión, podemos escribir la ley de conservación del momento lineal de un sistema aislado,

$$\vec{p}_{total\ antes} = \vec{p}_{total\ después} \tag{307}$$

de la manera siguiente:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1\,' + m_2\vec{v}_2\,' \tag{308}$$

Esto significa que en una colisión de las dos bolas, la velocidad de cada una puede variar (en módulo, dirección y sentido), pero siempre que se mantenga la igualdad anterior.

Hemos hecho el análisis anterior de la colisión de dos bolas de billar fijándonos únicamente en lo que ocurre sobre la superficie de la mesa de billar. Pero sobre las bolas actúa en todo momento la fuerza de la gravedad y, por lo tanto, la fuerza normal de reacción de la mesa que las mantiene. Ahora bien, la suma del peso y de la fuerza normal que actúan sobre cada bola es siempre nula. Por lo tanto, no actúa ninguna fuerza neta exterior sobre las bolas.

La relación (308) también será válida si dos bolas chocan en el aire. En este caso, sobre el sistema sí que actúa en todo momento una fuerza externa, la fuerza gravitatoria, que acelera las bolas en la dirección vertical y hacia abajo. Sin embargo, si aplicamos la ley de conservación (308) a dos instantes infinitesimalmente cercanos a la colisión de las bolas justo antes y justo después del choque, durante este incremento de tiempo que tiende a cero la aceleración que produce la fuerza de la gravedad es nula y podemos ignorarla. La relación (308) nos sirve para determinar la relación entre las velocidades de las bolas antes y después de la colisión. En cualquier otro momento, la aceleración de la gravedad determina la trayectoria y la velocidad instantánea de cada bola.

Analicemos una consecuencia de la relación (308): vamos a ver que no todas las situaciones son posibles en la colisión de dos bolas de billar.

Actividad 5.12. Conservación del momento lineal en una colisión

Una bola de billar que tiene una masa m_1 y se mueve a velocidad $\vec{v}_1$ choca contra otra bola de billar de masa diferente m_2 que está en reposo. ¿Puede detenerse la bola primera en el choque?

Solución

Podemos aplicar la conservación del momento lineal justo en un instante anterior y un instante posterior al choque de las bolas. La situación es la de la figura 104.

La ley de conservación del momento lineal no impide que pueda pasar lo que propone el enunciado de la actividad: si igualamos el momento lineal total (de las dos bolas) antes del choque, en el que sólo se mueve la bola 1, con el momento lineal total después del choque, en el que suponemos que sólo se mueve la bola 2, obtenemos:

$$m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2{}' \quad (309)$$

Esta expresión nos permite obtener la velocidad de la bola 2 a partir de las masas de las bolas y de la velocidad que lleva la bola 1 antes del choque.

Figura 104

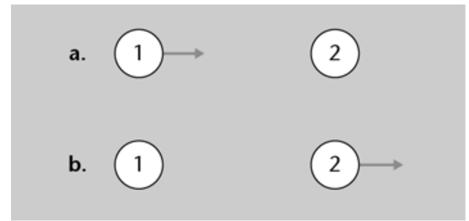


Figura 104

a. Una bola de billar choca contra otra que está en reposo.
b. ¿Se puede dar la situación, en la que la primera bola se detenga al chocar y la segunda se ponga en movimiento?

Sin embargo, al aplicar la ley de conservación de la energía en el subapartado siguiente veremos que, en general, no es posible un proceso en el que una bola choca contra otra que está en reposo y el resultado sea que la primera se detenga y la segunda se ponga en movimiento.

La situación de la figura 104 sólo es posible si ambas bolas tienen la misma masa. Este proceso es el que podemos ver en una mesa de billar: para colisiones frontales de dos bolas de masas idénticas, la primera queda detenida en seco. Pero si choca una bola grande contra una pequeña, las dos se moverán después del choque en el mismo sentido que llevaba la grande (figura 105) antes del choque.

Figura 105

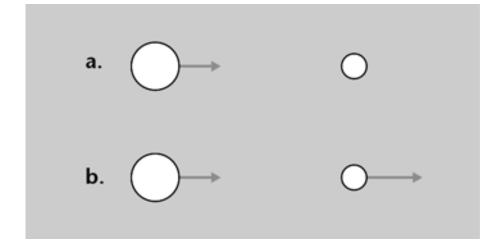


Figura 105

Una bola grande choca contra una bola pequeña que está en reposo.

a. Antes de la colisión.
b. Después de la colisión.

Y si choca una bola pequeña contra una grande, la pequeña rebotará y la grande se moverá en el sentido que llevaba la pequeña (figura 106).

Figura 106

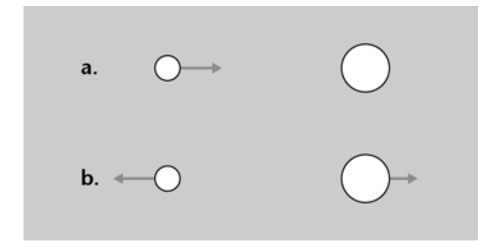


Figura 106

Una bola pequeña choca contra una bola grande que está en reposo.

a. Antes de la colisión.
b. Después de la colisión.

Vamos a ver ahora qué establece el principio de conservación de la energía, que pone límites a las transformaciones que pueden ocurrir en los procesos físicos.

5.5.2. Conservación de la energía

La ley de conservación del momento lineal, que acabamos de ver, relaciona los cambios que ocurren en las velocidades de las partículas durante los procesos. También podemos relacionar los cambios que ocurren en las energías cinéticas y potenciales de las partículas durante los mismos procesos. Para conseguirlo, hemos de asociar estos conceptos energéticos.

En el subapartado 5.3.3 hemos introducido el concepto de energía potencial, ecuación (267), como una manera de denominar el resultado del trabajo que hace una fuerza conservativa sobre un sistema.

Campo de fuerzas estacionario

Un campo estacionario de fuerzas es un campo en el que las fuerzas que actúan no dependen del tiempo. Pero un campo estacionario puede ser un campo de fuerzas no uniforme, es decir, las fuerzas pueden tener valores diferentes en puntos diferentes.

Y, por otro lado, en el subapartado 5.4 hemos demostrado que el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema (sean conservativas o no) y la variación de energía cinética que producen están relacionados según la ecuación (294). Si igualamos el trabajo hecho en los dos casos anteriores, podemos obtener una relación entre los dos conceptos energéticos, cinético y potencial. Vamos a verlo.

En un campo de fuerzas estacionario, el trabajo que hacen las fuerzas del campo para trasladar una partícula de un punto a otro no depende del camino que se recorra. Este hecho nos proporciona una relación muy importante: la ley (o principio) de la conservación de la energía. Con el objetivo de obtener la expresión de esta ley recordemos que el trabajo que hace una fuerza, como las fuerzas del campo conservativo, es igual al incremento de la energía cinética de la partícula, ecuación (294):

$$W = \Delta E_c \tag{310}$$

Por otro lado, este trabajo es igual a la disminución de la energía potencial de la partícula, ecuación (267), ya que al actuar sólo fuerzas conservativas, el trabajo total es el de las fuerzas conservativas:

$$W = -\Delta E_p \tag{311}$$

Expresiones de las energías cinética y potencial

En la expresión (316) podemos poner explícitamente el término de energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

pero no el término de energía potencial, porque tendremos una expresión diferente según el campo de fuerzas en el que se encuentre la partícula.

Debemos destacar aquí que nos estamos refiriendo a las fuerzas del campo en el que se encuentra la partícula, que aumentan su energía cinética, ecuación (310), y que también reducen su energía potencial, ecuación (311).

Al igualar las dos expresiones anteriores, (310) y (311), podemos escribir:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \tag{312}$$

Ahora escribimos los incrementos anteriores como la diferencia entre los valores en el punto 2 y los valores en el punto 1:

$$E_{c2} - E_{c1} + E_{p2} - E_{p1} = 0 \tag{313}$$

y ponemos los valores correspondientes al punto 1 a un lado de la igualdad y los del punto 2 al otro:

$$E_{c2} + E_{p2} = E_{c1} + E_{p1} \tag{314}$$

Finalmente, si designamos con la letra E_M ("energía" o "energía mecánica") la suma de la energía cinética y potencial:

$$E_M = E_c + E_p \tag{315}$$

es decir:

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + E_p \tag{316}$$

entonces podemos escribir una ecuación como la (316) para cada instante del movimiento del sistema. Por ejemplo, en un instante determinado, que denominaremos punto 1, la energía mecánica vale:

$$E_{M1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + E_{p_1} \tag{317}$$

y lo mismo para el punto 2.

Según la ecuación (314) hemos obtenido que:

$$E_{M1} = E_{M2} \tag{318}$$

Como los puntos 1 y 2 (igual que los caminos que van de un punto al otro) son arbitrarios, es decir, son dos puntos cualesquiera del campo de fuerzas conservativo en el que se encuentra la partícula, podemos enunciar finalmente la **ley de conservación de la energía**.

Ley de conservación de la energía

En un campo de fuerzas conservativo, la suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula en un punto cualquiera de su trayectoria es constante.

Simbólicamente, la ley de conservación de la energía se expresa también de la manera siguiente:

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_p = constante \tag{319}$$

El término *constante* significa que para cualquier proceso que suceda en el sistema, sobre el que actúan fuerzas conservativas, la suma $E_c + E_p$ dará en todo momento el mismo resultado. Dicho con otras palabras, la suma de las energía de la partícula (cinética, que sólo depende de la velocidad, y potencial, que sólo depende de las coordenadas) no varía con el desplazamiento de la partícula. Esta suma la hemos denominado *energía total* o, simplemente, *energía* de la partícula.

La ley de conservación de la energía se cumple para cualquier sistema aislado, es decir, para un conjunto de partículas o de cuerpos que interaccionan entre sí, pero sobre los que no actúan fuerzas exteriores al sistema. Si el sistema no está aislado, deberemos tener en cuenta los flujos de energía que entran o salen a la hora de calcular los balances energéticos que ocurren en un proceso.

Si existen fuerzas no conservativas que actúan sobre el sistema, la ley de conservación de energía anterior no es cierta. Este sería el caso, por ejemplo, de

una pelota grande que lanzamos: la energía total de la pelota, cinética más potencial, es constante si despreciamos los efectos del rozamiento, que es una fuerza no conservativa. Las fuerzas de rozamiento o de fricción no son fuerzas conservativas porque el trabajo que se hace contra la fuerza de rozamiento no es el mismo si vamos de un punto a otro por un camino o por otro. Cuanto más larga sea la trayectoria que va de un punto a otro, más trabajo se hace contra las fuerzas de fricción.

Recordemos que hemos obtenido la ley de conservación de la energía mecánica suponiendo que la única fuerza que hace trabajo sobre la partícula es una fuerza conservativa. En efecto, en este caso el trabajo hecho será igual a la disminución de la energía potencial del sistema y este trabajo (de la fuerza conservativa) será también igual al incremento de la energía cinética de la partícula:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = +\Delta E_c \qquad (320)$$

Esta ecuación muestra que:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \qquad (321)$$

es decir, que si sólo hacen trabajo las fuerzas conservativas, no existe ningún cambio en la energía mecánica total del sistema:

$$\Delta(E_c + E_p) = 0 \qquad (322)$$

Es el principio de conservación de la energía mecánica.

Cuando actúen fuerzas conservativas y no conservativas, continuaremos diciendo, como al final del subapartado 5.4, que:

- El incremento de energía potencial es menos el trabajo de las fuerzas conservativas.

- El incremento de energía cinética es el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Por lo tanto, la relación (320) será ahora:

$$W_T = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{fuerzas\,conservativas} + W_{fuerzas\,no\,conservativas} = -\Delta E_p + W_{fuerzas\,no\,conservativas} \qquad (323)$$

pero este trabajo que hacen las fuerzas conservativas y no conservativas se convierte en un aumento de energía cinética, según el teorema trabajo-energía cinética:

$$W = \Delta E_c \qquad (324)$$

y si igualamos ambas expresiones, (323) y (324), y agrupamos las variaciones de las energías cinética y potencial, como en la ecuación (321), obtenemos:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_{fuerzas\ no\ conservativas} \tag{325}$$

En esta expresión, si observáis (315) ya veis que $\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_M$. Por lo tanto, hemos encontrado el resultado siguiente.

El trabajo de las fuerzas no conservativas produce un incremento de la energía mecánica de la partícula:

$$\Delta E_M = W_{fuerzas\ no\ conservativas} \tag{326}$$

La expresión anterior es la generalización de la ley de conservación de la energía para el caso en que actúan fuerzas no conservativas.

La ley de conservación de la energía mecánica es útil para analizar procesos en términos energéticos.

Veamos a continuación un ejemplo que muestra que existen procesos prohibidos por la ley de conservación de energía. El ejemplo es el de colisiones de bolas de billar que ya hemos comentado en el subapartado anterior.

Supondremos que las **colisiones** de las bolas son **elásticas**.

En una **colisión elástica**, la suma de las energías cinéticas de las partículas antes del choque coincide con la suma de las energías cinéticas que tienen las partículas después del choque. En caso contrario, hablamos de **choque inelástico**.

En el problema 5.1 vamos a ver un ejemplo de proceso inelástico.

Actividad 5.13. Conservación del momento lineal y de la energía

Retomemos la actividad 5.12: una bola de billar de masa m_1 que se mueve a velocidad $\vec{v}_1$ choca contra otra bola de billar de masa diferente m_2 que está en reposo. ¿Puede detenerse la primera bola en el choque? (Suponed que la colisión de bolas de billar es elástica.)

Solución

Supongamos que es posible el proceso que expone el enunciado: una bola de velocidad $\vec{v}_1$ (bola 1) choca contra otra bola (bola 2) que está en reposo y la bola 1 se detiene.

El momento lineal inicial del sistema es simplemente $m_1\vec{v}_1$. Si, al chocar, suponemos que la primera bola se detiene y la segunda se mueve con una velocidad $\vec{v}_2$, entonces el momento lineal total del sistema después del choque es $m_2\vec{v}_2$. La aplicación de la ley de con-

servación del momento lineal nos da una relación entre las velocidades de las dos bolas (actividad 5.12, ecuación (309)):

$$m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2 \tag{327}$$

La energía potencial de las bolas es gravitatoria, $E_p = mgh$, y como podemos tomar el origen de energías potenciales a la altura de la superficie de la mesa, $E_p = 0$ en todo momento; por lo tanto, sólo tenemos energía cinética y la aplicación de la ley de conservación de la energía (ecuación 314) se simplifica bastante porque inicialmente sólo tenemos la partícula 1 en movimiento, y después del choque sólo la 2:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} = \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} \tag{328}$$

Ahora combinaremos ambas leyes de conservación, la del momento lineal y la de la energía.

Trabajaremos primero el segundo término de la ecuación 314. Si escribimos el segundo término de la expresión (328) de la manera siguiente, multiplicando y dividiendo por m_2:

$$\frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{\frac{1}{2}m_2^2\vec{v}_2^{\,2}}{m_2} \tag{329}$$

y sustituimos en el numerador el momento lineal de la partícula 2 por el de la partícula 1, según la ecuación (327), obtenemos:

$$\frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{\frac{1}{2}m_1^2\vec{v}_1^{\,2}}{m_2} \tag{330}$$

ahora ya podemos pasar esta expresión a la derecha de la ecuación (328) y obtenemos:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} = \frac{\frac{1}{2}m_1^2\vec{v}_1^{\,2}}{m_2} \tag{331}$$

Eliminamos la velocidad de la partícula 1 y obtenemos una relación entre las masas de las partículas que chocan:

$$m_2m_1 = m_1^2 \tag{332}$$

Esta igualdad es consecuencia de las dos leyes de conservación. Si simplificamos el factor m_1 en los dos miembros de la ecuación anterior, vemos que sólo se cumple para bolas de la misma masa, $m_2 = m_1$. Por lo tanto, la suposición de que la bola que efectúa el choque se detiene totalmente nos lleva a un resultado contradictorio, salvo que ambas bolas tengan masas idénticas.

Por lo tanto, como ya dijimos en la actividad 5.12, puede verse en el juego de billar el proceso en el que una bola choca frontalmente con otra y la primera queda detenida en seco, porque las dos bolas tienen la misma masa. Nunca se observará este proceso si las bolas tienen masas diferentes, porque se violarían las leyes de conservación de la energía y del momento lineal.

Los teoremas que hemos obtenido se denominan *ley de conservación del momento lineal* (subapartado 5.5.1) y *ley de conservación de la energía* (este subapartado). Se trata de dos leyes fundamentales de la mecánica. Su carácer general nos permite aplicarlos a todos los fenómenos, para cualquier tipo de fuerzas conservativas que actúen dentro del sistema aislado. Vamos a ver otro ejemplo de aplicación de estas leyes.

Actividad 5.14. Aplicación a la caída libre

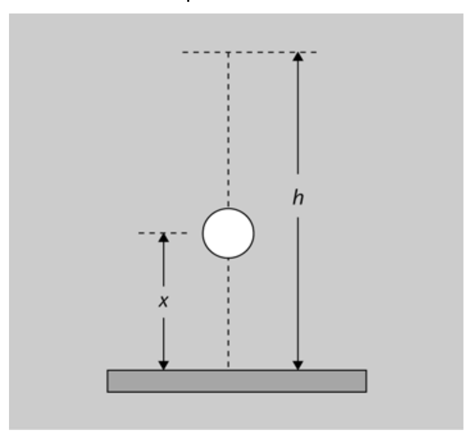
Aplicad la ley de conservación de la energía a un cuerpo que cae verticalmente desde una altura *h*. ¿Qué deducís de ello?

Solución

Cuando un cuerpo cae, se acelera por la atracción de la Tierra (figura 107). A medida que cae cada vez más rápido, su energía cinética aumenta y su energía potencial decrece de manera que la ganancia de energía cinética E_c es igual a la pérdida de energía potencial E_p.

Al resolver un problema a partir del concepto de energía, y no de fuerza, no tenemos en cuenta las aceleraciones de las partículas, sino sus velocidades iniciales y finales.

Figura 107. Un objeto cae desde una altura *h*, al cabo de un tiempo está a una altura *x*.



Si el cuerpo cae desde el reposo (es decir, sin que tenga una velocidad inicial), la energía total a una altura *h*, $E(h) = E_c + E_p$, es sólo potencial, $E_p = mgh$:

$$E(h) = E_c(h) + E_p(h) = 0 + mgh = mgh \tag{333}$$

A medida que cae el objeto, parte de la energía potencial se convierte en energía cinética. La energía total que tiene la partícula en una posición *x* de la trayectoria es la suma de las energías cinética y potencial en este punto:

$$E(x) = E_c(x) + E_p(x) \tag{334}$$

es decir:

$$E(x) = \frac{1}{2}mv(x)^2 + mgx \tag{335}$$

De la identificación de la energía en la posición *x*, $E(x)$, con la energía en la posición *h*, $E(h)$, podemos obtener la velocidad de la partícula en cualquier punto de la caída.

En particular, cuando el cuerpo llega al suelo con una velocidad final v_f, la energía total es sólo cinética porque hemos tomado el origen de energías potenciales en la posición del suelo; por lo tanto:

$$E(0) = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0 \tag{336}$$

si igualamos la energía total inicial con la energía total final:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 \tag{337}$$

podemos concluir que el cuerpo llega al suelo con una velocidad:

$$v_f = \sqrt{2gh} \tag{338}$$

Ya dedujimos esta ecuación por otro método en el apartado 2, ecuación (150). Resulta muy instructivo que comparéis como se dedujo el resultado (338) en aquel caso y ahora.

Vemos que las leyes de conservación pueden utilizarse como alternativa a las ecuaciones del movimiento para calcular la velocidad de un cuerpo que cae. También pueden emplearse para resolver muchos otros tipos de problemas de dinámica.

5.5.3. ¿Qué hemos aprendido?

Un objeto que se mueve no sólo tiene una posición en el espacio, una masa, una velocidad y un momento lineal, sino que también tiene una energía, en forma de energía cinética, energía potencial y una energía mecánica total. Simbólicamente, la posición, la masa, la velocidad, el momento lineal, la energía cinética, la energía potencial y la energía mecánica se escriben, respectivamente: $\vec{r}$, m, $\vec{v}$, $\vec{p}$, E_c, E_p, E_M.

Las leyes de Newton, la definición de diferencia de energía potencial y el teorema trabajo-energía cinética nos han permitido llegar a dos leyes de conservación básicas de la física:

- La ley de conservación de la energía mecánica ($E_c + E_p = constante$), cuando las fuerzas son conservativas.
- La ley de conservación del momento lineal para sistemas aislados.

Estos son dos de los resultados más importantes de la mecánica, que se utilizan en muchas otras ramas de la física.

También hemos visto que:

- El trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula modifica su energía cinética.
- El trabajo de las fuerzas conservativas reduce la energía potencial de la partícula.
- Cuando actúan fuerzas conservativas y no conservativas, la energía mecánica total (suma de energías cinética y potencial) no se conserva en un proceso, sino que aumenta en un valor igual al trabajo que hacen las fuerzas no conservativas sobre la partícula.

Esquemáticamente, estos resultados pueden sintetizarse en las relaciones de la tabla 4.

Tabla 4. Relaciones generales entre el trabajo de las fuerzas y la energía de las partículas

Relación	Válida para fuerzas...
$\Delta E_c = W_{fuerzas}$	Conservativas y no conservativas
$\Delta E_p = -W_{fuerzas\ conservativas}$	Conservativas
$E_M = E_c + E_p$	(Definición)
$E_M = constante$	Conservativas
$\Delta E_M = W_{fuerzas\ no\ conservativas}$	Conservativas y no conservativas

5.6. Recapitulación

Hemos introducido conceptos fundamentales de la física como el de trabajo, energía en las diversas formas en que puede presentarse, momento lineal y las leyes de conservación correspondientes.

a) El momento lineal de una partícula es una magnitud relacionada directamente con la masa y la velocidad de la partícula, y que tiene la propiedad de que sus cambios por unidad de tiempo son iguales a la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

b) Una fuerza hace trabajo sólo si tiene al menos una componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento de la partícula. El concepto físico de trabajo que hace una fuerza puede expresarse de manera muy sintética gracias al álgebra vectorial.

c) El tema de la energía ocupa muchos de los debates de las sociedades modernas. Los conceptos introducidos en este apartado son básicos en toda la física, no sólo en la mecánica:

- Los conceptos energéticos son conceptos difíciles de definir, de explicar y de entender. Por un lado, sólo sabemos calcular diferencias de energía, no valores absolutos. En efecto, la enegía potencial se define directamente en términos de incrementos de energía. Y, como hemos visto, un objeto en movimiento tiene energía cinética, pero ésta se anula si nos ponemos en el sistema de referencia en el que el objeto está en reposo.

- Por otra parte, en cualquier proceso físico que ocurra en un sistema aislado la energía total del sistema se conserva. Esta ley de conservación tiene una validez más general que la de la conservación de energía mecánica que hemos visto en este apartado.

La comprensión de los conceptos que hemos visto a lo largo de estos apartados, y que forman la base de la mecánica, se consigue cuando se ponen en práctica para tratar de entender situaciones físicas diversas. En el apartado siguiente vamos a aplicarlos a un tema que es de interés en ingeniería, los sistemas oscilantes.

5.7. Problemas de ampliación

Problema 5.1. Limitaciones en los movimientos

Ahora estamos en condiciones de contestar la cuestión que quedó pendiente en la discusión de la pelota que sube y baja (subapartado 2.1.3): lanzamos verticalmente una pelota y la recogemos con las manos cuando cae. ¿Puede tener

la pelota una velocidad mayor cuando regresa a nuestras manos que cuando la lanzamos?

Aplicad el principio de conservación de la energía a tres puntos de la trayectoria de la pelota: el inicial, el de máxima altura y el punto en el que la pelota regresa a nuestras manos.

Problema 5.2. Rebotes

Nos dicen que cuando una pelota cae verticalmente y rebota, pierde un tanto por ciento r de su energía en el impacto. Se trata de un ejemplo de proceso inelástico, en el que la energía cinética de la pelota no se conserva.

Dibujad una gráfica cualitativa de la altura de la pelota conforme pasa el tiempo y rebota varias veces.

¿Cuál es la expresión de la energía potencial máxima de la pelota después de cada rebote?

¿En qué porcentaje se reduce la velocidad de la pelota en cada impacto?

Problema 5.3. Fuerza, trabajo y energía

Hemos visto en la actividad 5.8 que si subimos un objeto por un plano inclinado hacemos menos fuerza para empujarlo, pero el camino es más largo. Aplicad el principio de conservación de la energía para calcular el trabajo que hacemos cuando arrastramos el objeto por el plano inclinado, en comparación con el trabajo que se hace al subir el objeto verticalmente (suponed que el plano no tiene rozamiento).

Problema 5.4. Trabajo que hacemos

a) Sostenemos un libro de 1 kg en alto a una altura de 1 m durante una hora. ¿Qué trabajo hacemos por unidad de tiempo?

b) Mientras sostenemos un libro de 10 kg en el aire, lo desplazamos 5 m en dirección horizontal. ¿Qué trabajo hacemos?

c) Levantamos un libro 2 m, después 3 m más y, finalmente, lo dejamos donde estaba inicialmente. ¿Qué trabajo total hemos hecho sobre el libro?

6. Estudio de caso. El oscilador armónico

Muchos fenómenos físicos se pueden modelar mediante unos elementos denominados *osciladores* y que ya iréis viendo exactamente qué son a lo largo del apartado. De momento os los podéis imaginar como si fueran muelles. El objetivo principal de este apartado es analizar el movimiento oscilatorio y aprovecharlo para ver la aplicación de las leyes y los conceptos de la mecánica en un caso de interés básico. Las oscilaciones se presentan en los fenómenos cotidianos y en muchos campos de la ciencia y de la ingeniería: los árboles que se mueven por efecto del viento, la estructura de un coche que vibra cuando viajamos, las cuerdas vibrantes de una guitarra, las oscilaciones de la corriente en un circuito eléctrico, las oscilaciones de las moléculas de aire cuando pasa una onda sonora, etc.

En este apartado seguiremos la estructura general que hemos seguido hasta ahora: primero estudiaremos la cinemática de un oscilador (ecuación de la trayectoria), después su dinámica (fuerzas que actúan) y, finalmente, vamos a ver los aspectos energéticos del sistema oscilante.

Así, empezaremos describiendo el movimiento oscilatorio en su forma más básica, el denominado *movimiento armónico simple*. Definiremos los parámetros que lo describen, como la frecuencia angular, la fase inicial y la amplitud, y después calcularemos la velocidad y la aceleración de la partícula que oscila.

Introduciremos entonces los modelos básicos de osciladores, el muelle oscilante y el péndulo, y en particular, las denominadas *oscilaciones pequeñas* de estos sistemas.

Los conceptos energéticos aplicados a los sistemas oscilantes nos permitirán describir el movimiento como un intercambio continuo de energía cinética y potencial. La descripción de las fuerzas que actúan sobre el sistema oscilante y la resolución de la ecuación del movimiento correspondiente nos permitirá deducir lo que se conoce como *frecuencia de oscilación natural*.

Introducción. Vibraciones

Como vimos en el subapartado 1.4, los movimientos básicos que puede tener una partícula o un conjunto de partículas son de tipo translacional, rotacional y vibracional. Hasta ahora hemos tratado los movimientos en general y, principalmente, el movimiento translacional. En este apartado nos centraremos en el movimiento vibracional por la importancia que tiene en muchos fenómenos físicos y porque es un buen ejemplo de aplicación de todo lo que hemos aprendido en estos apartados de mecánica.

Utilizaremos los términos *oscilación* y *vibración* como sinónimos.

Una **oscilación** o una **vibración** mecánica es un movimiento en el que un cuerpo se desplaza a un lado y a otro de un punto o de una dirección del espacio en el que el sistema se halla en equilibrio.

Por todos lados vemos cuerpos que oscilan movidos por el viento, como un columpio, una lámpara que cuelga del techo, una palmera, un edificio alto o un puente. Hace años era habitual tener en casa un reloj de pared en el que la oscilación de un péndulo marcaba el paso del tiempo. En los aparatos de radio y de televisión se generan oscilaciones de corrientes eléctricas.

El estudio de sistemas oscilantes o vibrantes y, en particular, del movimiento oscilatorio armónico es importante por su ubicuidad en multitud de problemas cientificotécnicos (en mecánica, ingeniería, circuitos eléctricos, etc.). En particular, los movimientos vibratorios u oscilatorios son la fuente de muchos fenómenos ondulatorios y el estudio de la generación y propagación de las ondas es una rama básica de la física, en especial por lo que respecta a las ondas electromagnéticas. La luz y el sonido, por ejemplo, son vibraciones que se propagan por el espacio en forma de ondas; las vibraciones de una cuerda de guitarra son el origen del sonido que oímos cuando suena la guitarra.

¿Qué aprenderemos?

- Analizaremos los modelos físicos más comunes de sistemas oscilantes, como el péndulo simple y la masa unida a un muelle.
- Obtendremos la ley de movimiento de un sistema oscilante y calcularemos su frecuencia natural de oscilación.
- Aprenderemos a reconocer la forma que presenta la ecuación diferencial de un movimiento vibratorio armónico.

¿Qué supondremos?

El oscilador puede estudiarse como una aplicación de las leyes de Newton al caso de movimientos unidimensionales.

También deberemos recordar las funciones trigonométricas, que son la base de la descripción de las vibraciones.

6.1. Oscilaciones: periodo y frecuencia

Empezaremos el estudio de las oscilaciones con un modelo sencillo de un sistema oscilante: el péndulo simple.

Consideramos un péndulo simple como una partícula de masa *m* que cuelga de un hilo que no puede estirarse (un hilo no extensible, no elástico). El hilo se sujeta por el otro extremo y la masa oscila en torno a la dirección vertical cuando la separamos de la posición de equilibrio, como podéis ver en la figura 108a.

El péndulo hace un movimiento oscilatorio repetitivo que se denomina *periódico*. El péndulo hace una oscilación completa cuando la masa sale de un punto y vuelve al mismo con un movimiento en la misma dirección y sentido que en el movimiento inicial. Por ejemplo, el ciclo de movimiento 3 → 1 → 2 → 1 → 3 (figura 108a) es una oscilación completa porque la masa sale del reposo en el punto 3 y vuelve a detenerse momentáneamente antes de comenzar un nuevo ciclo. También, en el movimiento 1 → 2 → 1→ 3 → 1 cumple una oscilación completa y se tarda un periodo.

Se denomina **periodo** *T* del péndulo al tiempo que tarda en completar una oscilación.

Otro modelo sencillo de sistema oscilante es el de una masa unida a un muelle sujeto al techo (figura 108b). Si tiramos de la masa un poco verticalmente y la soltamos, se pondrá a oscilar arriba y abajo. Un periodo es el tiempo que tarda el muelle en completar una oscilación, es decir, el tiempo que tarda en volver al punto de partida e iniciar un nuevo ciclo de vibración.

Figura 108. Modelos de sistemas oscilantes

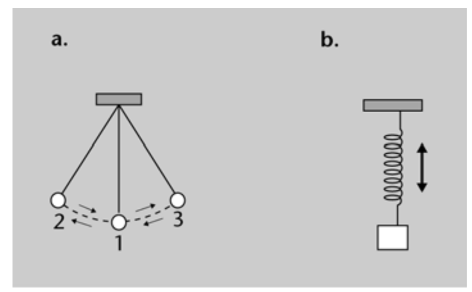


Figura 108

a. Oscilaciones de un péndulo.
b. Oscilaciones de una masa unida a un muelle.

Recordad

Utilizamos SI para referirnos al Sistema Internacional de unidades.

Heinrich Rudolf Hertz

La denominación de la unidad de medida *hercio* es en honor de este físico alemán (Hamburgo, 1857 - Bonn, 1894) que demostró la existencia de las ondas electromagnéticas y que éstas podían propagarse en el vacío, con lo que no era necesaria la existencia de una sustancia denominada *éter* en la que se pensaba que se debían de propagar las ondas electromagnéticas.

Actividad 6.1. Frecuencia

La frecuencia de un movimiento oscilatorio que tiene un periodo *T* se define como la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (339)$$

a) ¿Qué es *f*? Para definir esta nueva magnitud recordad cómo se lee un cociente.
b) ¿Cómo se define la unidad SI de frecuencia, el hercio?

Solución

a) El periodo *T* de un movimiento oscilatorio es el tiempo que tarda en completar una oscilación:

$$T = \frac{tiempo}{oscilación\ completa} \qquad (340)$$

Por lo tanto, su inversa, *f*, será:

$$f = \frac{\text{oscilación completa}}{\text{tiempo}} \tag{341}$$

Y la **frecuencia** de un movimiento oscilatorio es **el número de oscilaciones que el oscilador completa por unidad tiempo**.

b) Como la unidad SI de periodo es 1 s, 1 hercio (Hz) es la frecuencia de un movimiento oscilatorio que cumple un ciclo completo por segundo:

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1} \tag{342}$$

Vamos a calcular las frecuencias de algunas oscilaciones.

Actividad 6.2. Frecuencias de oscilación

a) ¿Qué frecuencia tiene un movimiento oscilatorio cuyo periodo es de 0,02 s?
b) Y ¿qué periodo tiene una oscilación de 1 GHz?

Solución

a) De la ecuación (339):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02\,\text{s}} = 50 \text{ s}^{-1} = 50 \text{ Hz} \tag{343}$$

50 Hz es también la frecuencia de la corriente eléctrica alterna en Europa (en Estados Unidos y en algunos otros países, la frecuencia de la corriente eléctrica es de 60 Hz).

b) Si recordamos que el prefijo *giga* indica mil millones, un gigahercio serán mil millones de hercios o 10^9 Hz. Así, de la ecuació (339):

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1 \text{ GHz}} = \frac{1}{10^9 \text{ Hz}} = 10^{-9} \text{ s} = 1 \text{ ns} \tag{344}$$

1 ns es un nanosegundo, que equivale a 10^{-9} s.

Una propiedad básica de los sistemas oscilantes es la periodicidad de su movimiento, es decir, el hecho de que se repite cíclicamente. Si T es el periodo de un movimiento periódico, la partícula que oscila ocupa la misma posición y tiene la misma velocidad (en módulo, dirección y sentido) en los instantes t y $t + T$:

$$f(t + T) = f(t) \tag{345}$$

La ecuación (345) expresa el hecho de que la función toma en un instante t cualquiera el mismo valor que en un instante $t + T$ posterior (o en un instante $t - T$ anterior). Por eso decimos que el movimiento de un oscilador es periódico. Existen una infinidad de movimientos periódicos descritos por funciones de todo tipo que cumplen la propiedad de periodicidad.

En general, si una función del tiempo $f(t)$ es periódica de periodo T, la función también repetirá esos valores cuando pasan dos, tres o cualquier número de periodos (figura 109).

La función matemática que describe el movimiento de unos osciladores como los de la figura 108 debe tomar valores positivos y negativos (para desplazamientos a un lado y al otro de la posición de equilibrio del oscilador).

Figura 109. Un ejemplo de función periódica

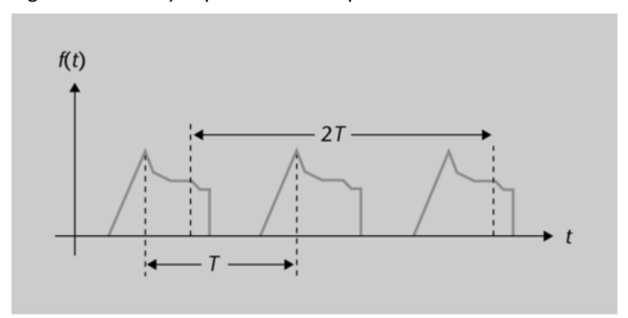


Figura 109

La función se repite para un periodo T y múltiples de T: $2T$, $3T$, etc.

Una función como la de la figura 109, por ejemplo, a pesar de ser periódica, no nos serviría para describir las oscilaciones del péndulo o del muelle de la figura 108, porque no presenta simetría para las oscilaciones a un lado y al otro de la posición de equilibrio y no toma valores negativos.

Veremos a continuación que las funciones trigonométricas sí que sirven para describir el movimiento oscilatorio.

6.1.1. Movimiento armónico simple

Las funciones periódicas más sencillas son las trigonométricas básicas, las funciones seno y coseno. Estas funciones toman valores positivos y negativos en un ciclo y se repiten periódicamente. Las funciones seno y coseno son **funciones armónicas**.

Si el movimiento de un oscilador puede describirse con una función seno o coseno, se trata de un **oscilador armónico**.

Por lo tanto, un movimiento periódico básico es un movimiento en el que las coordenadas del punto material varían según la ley:

Funciones armónicas

Las funciones trigonométricas seno y coseno se denominan también *funciones armónicas*.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \tag{346}$$

donde A, ω y δ son magnitudes constantes.

Un movimiento periódico como el descrito por la ecuación (346) se denomina *movimiento oscilatorio armónico* o *movimiento armónico simple (MAS)*. El desplazamiento de la partícula que oscila con respecto a la posición de equilibrio según la función descrita por la ecuación (346) presenta el aspecto que podéis ver en la figura 110. En efecto, a medida que avanza el tiempo, la partícula se aleja de su posición inicial y llega al punto de máxima separación del equilibrio, P_1, a continuación se aproxima al punto de desplazamiento cero, P_2, y así sucesivamente, como hace el péndulo de la figura 108a.

Parámetros de un oscilador: A, ω, δ, T

A, ω ("omega"), δ ("delta") y T son, respectivamente, la amplitud, la frecuencia angular, el desfase o fase inicial y el periodo del oscilador.

Figura 110. Oscilaciones sinusoidales periódicas en un MAS

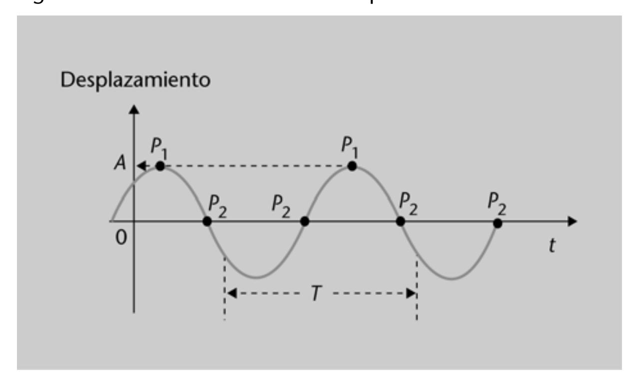


Figura 110

Es el caso del desplazamiento angular de un péndulo o del desplazamiento lineal de una masa unida a un muelle. Se indica la amplitud y el periodo de la oscilación.

Un péndulo y una masa unida a un muelle como los de la figura 108 pueden oscilar de manera que el movimiento venga descrito por la relación (346). En el caso del péndulo, la variable $x(t)$ está relacionada con el ángulo que el péndulo forma con la vertical (figura 111a); en el caso del muelle, la variable $x(t)$ es el desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio de la masa que vibra con el muelle, figura 111b.

En un circuito eléctrico también pueden producirse oscilaciones, como veréis en otras asignaturas de la titulación y en estos casos la variable $x(t)$ puede ser la corriente o el potencial eléctrico.

Figura 111

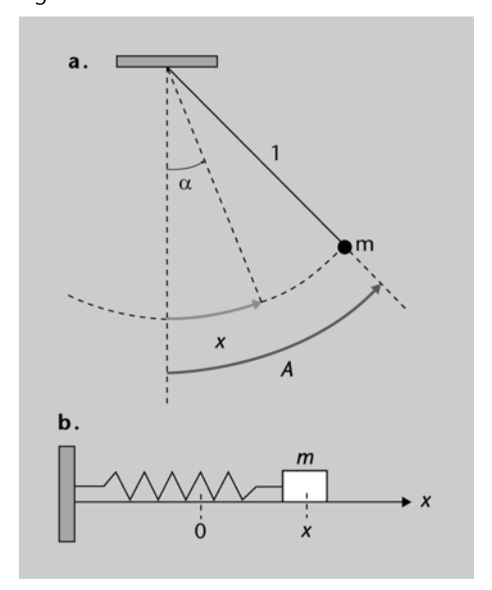


Figura 111

Parámetros de los modelos básicos de oscilador: **a.** Péndulo oscilante. **b.** Muelle elástico.

Fijaos en que, si en lugar de la expresión (346), escribimos:

$$x(t) = A\text{sen}(\omega t + \delta) \qquad (347)$$

esta función también representa un MAS. La única diferencia con la expresión (346) es que si $\omega t + \delta = 0$, la función toma el valor $x = 0$ en el caso (347) (porque sen $0 = 0$), y toma el valor $x = A$ en el caso (346) (porque cos $0 = 1$). En definitiva, tomar la ecuación (346) o la (347) como punto de partida para

analizar el movimiento oscilatorio significa considerar la posición inicial (t = 0) del oscilador ($\delta = 0$) en el extremo o en el centro de la trayectoria, respectivamente.

Continuaremos la discusión del movimiento oscilatorio a partir de la ecuación (346) como punto de partida, en algunos libros de texto toman la ecuación (347) como expresión que describe la posición instantánea del oscilador. Cualquiera de las dos opciones es igualmente válida, pero debemos tenerlo presente a la hora de comparar expresiones concretas de magnitudes como la velocidad, la energía potencial, etc., que provienen de textos que adoptan una u otra expresión como punto de partida.

6.1.2. Frecuencia y frecuencia angular, amplitud y fase inicial

El sentido físico de las magnitudes A y ω que aparecen en la expresión (346) puede deducirse de la manera siguiente. En primer lugar, como el valor máximo del coseno es la unidad, el valor máximo de la coordenada x en la ecuación (346) será A, que se denomina *amplitud*. La magnitud x, que varía entre los límites $-A$ y A, se denomina *elongación* del MAS. Es decir, la elongación es el punto donde se encuentra en cada instante el oscilador; así, podemos decir también que la amplitud es una elongación particular.

La **amplitud** del oscilador es el valor máximo de la posición del oscilador. La **elongación** es la posición instantánea, x, de la partícula que oscila. La amplitud de un oscilador es la máxima elongación que puede alcanzar.

Por otra parte, como el periodo de la función coseno es igual a 2π, el periodo del movimiento de un oscilador se relaciona con ω mediante el cociente siguiente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (348)$$

o también:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (349)$$

donde la magnitud ω se denomina *frecuencia angular*.

La **frecuencia angular** de un oscilador es el número de ciclos que completa por segundo.

A continuación veremos de dónde viene esta ecuación.

Actividad 6.3. Periodo y frecuencia angular de un oscilador armónico

Demostrad la expresión (348) a partir de las relaciones (345) y (346).

Solución

Si imponemos la condición (345), $f(t) = f(t + T)$, a la función periódica (346), obtenemos:

$$A\cos(\omega t + \delta) = A\cos(\omega(t + T) + \delta) \quad (350)$$

y como la función coseno tiene periodo 2π, la diferencia entre los argumentos de las dos funciones coseno anteriores debe ser 2π (o un múltiplo de 2π):

$$(\omega(t + T) + \delta) - (\omega t + \delta) = 2\pi \quad (351)$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos:

$$\omega T = 2\pi \quad (352)$$

o bien:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (353)$$

como queríamos demostrar.

Si comparamos las relaciones (349) y (339) vemos que la relación entre la frecuencia angular ω y la frecuencia de oscilación, f, es:

$$\omega = 2\pi f \quad (354)$$

En algunos textos a veces se utiliza el mismo nombre, *frecuencia*, para designar ω y f.

Por otra parte, ¿que es δ? El parámetro δ es parte de lo que se denomina *fase*.

La **fase** de la oscilación es el argumento de la función coseno, $\omega t + \delta$.

Por lo tanto, podemos hablar de **fase inicial** o fase en el instante que tomamos como inicio del tiempo; δ es la fase inicial.

Vamos a ver por qué.

Actividad 6.4. Fase inicial

Explicad por qué δ es la fase inicial.

Solución

δ es el valor de la fase cuando $t = 0$, es decir, en el instante inicial. En efecto, si tomamos $t = 0$ en la fase de la función coseno de la ecuación (346), obtenemos:

$$(\omega t + \delta)_{t = 0} = \omega \cdot 0 + \delta = \delta \quad (355)$$

Ya hemos determinado el significado de los parámetros que definen la elongación de un MAS.

Derivada del coseno

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\text{sen}x$$

Ahora vamos a continuar con la descripción cinética del oscilador.

6.1.3. Velocidad en el MAS

La velocidad de una partícula que oscila en una dimensión se obtiene derivando su posición con respecto al tiempo (ecuación 67), $v = dx/dt$. A partir de la expresión (346):

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \tag{356}$$

Vemos que la **velocidad** también es **armónica**.

> La velocidad de un oscilador armónico viene descrita también por una función armónica.

Por lo tanto, la velocidad también oscila con la misma frecuencia que la posición.

La amplitud de la velocidad es el valor máximo que puede alcanzar la velocidad; si hacemos que el seno de la ecuación (356) tome el valor unidad, vemos que la amplitud de la velocidad, $v_{máx}$, es igual a la amplitud del desplazamiento multiplicada por la frecuencia:

$$v_{máx} = \omega A \tag{357}$$

Como hemos dicho, la velocidad también varía según una ley armónica, la ecuación (356), pero con la función seno en lugar de la función coseno que describe el desplazamiento del oscilador. Una función coseno oscila con una fase que se diferencia en 90° de una función seno. Esto significa que ambas funciones toman los mismos valores, pero cuando sumamos 90° $\left(\pi/2\right)$ al argumento de una de ellas.

Veámoslo

Podemos emplear la propiedad de las funciones trigonómetricas comentada al margen para escribir la función velocidad (356) de la manera siguiente:

$$v = A\omega \cos\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{358}$$

En efecto, si desarrollamos el coseno de la expresión (358) para los dos ángulos $a = \omega t + \delta$ y $b = \pi/2$, obtenemos:

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \delta) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - A\omega \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{359}$$

y como el coseno de $\pi/2$ se anula y el seno de $\pi/2$ es la unidad:

$$v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \tag{360}$$

y llegamos a la expresión (356).

Una relación trigonométrica útil

El coseno de la suma de dos ángulos puede expresarse como:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Otra manera de ver que las funciones seno y coseno están desfasadas en una cantidad $\pi/2$ es geométricamente, a partir de la representación gráfica de las funciones trigonométricas, como podéis ver en la figura 112. Observad que la altura de los triángulos corresponde al seno y la base al coseno.

Figura 112

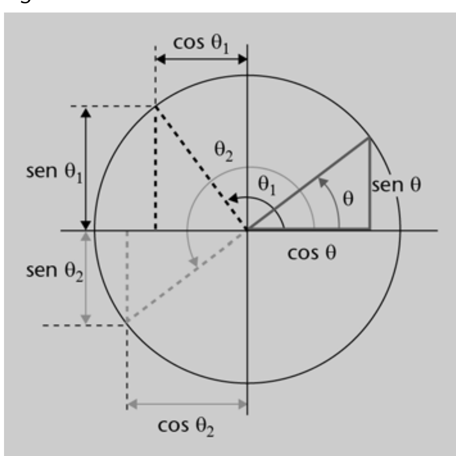


Figura 112

Sobre un círculo de radio unidad se definen las funciones seno y coseno para un ángulo θ. También se muestran las funciones para los ángulos $\theta_1 = \theta + \pi/2$, y $\theta_2 = \theta + \pi$. Se observa, por ejemplo, que $\cos\theta_1 = -\text{sen}\,\theta$ y que $\cos\theta_2 = -\cos\theta$.

Si comparamos la expresión (358) con la ley del desplazamiento (346), vemos que las funciones y las fases de las dos funciones son idénticas salvo el término extra $\pi/2$ que aparece en la fase en el caso de la velocidad, ecuación (358). Por lo tanto, la variación de la función velocidad está "desfasada en 90°", o "tiene un desfase de $\pi/2$" con respecto a la variación de la posición del oscilador. Es decir, la diferencia de fase entre las dos funciones es de $\pi/2$.

Gráficamente, una función pasa por los valores máximos "antes" que la otra (figura 113). ¿Qué significa esto? Observad que en los extremos de la oscilación, cuando $x = \pm A$, la posición es la máxima posible y la velocidad es nula (el oscilador se detiene instantáneamente). Esto se corresponde con que si $\omega t + \delta = 0$, la ecuación (346) da $x = A$ y la ecuación (360) da $v = 0$.

En cambio, en el punto central, el desplazamiento con respecto a la posición inicial es nulo y la velocidad de la partícula que oscila es máxima. Por lo tanto, podéis ver que en todos los puntos la posición y la velocidad de la partícula están desfasadas 90°, el mismo desfase que existe entre la función coseno y la función seno del mismo ángulo.

En resumen, una función seno y una función coseno de un mismo ángulo toman los mismos valores pero con un "retraso" o desfase de $\pi/2$.

Figura 113

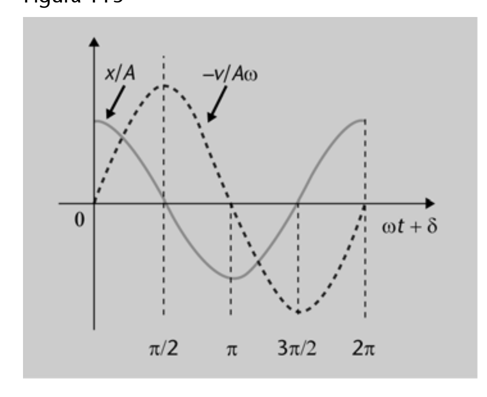


Figura 113

Desfase de 90° entre la posición, x/A (línea continua) y la velocidad, $-v/A$ (línea discontinua) para un oscilador.

Ya sabemos qué significan los parámetros que aparecen en la ecuación de movimiento del oscilador, la ecuación (346). Ahora vamos a ver cómo se determinan.

6.1.4. ¿Qué hemos aprendido?

a) Hemos introducido un conjunto de conceptos que permiten describir un MAS:

- fase y fase inicial,
- elongación,
- amplitud,
- frecuencia,
- frecuencia angular,
- periodo.

b) Hemos visto que elongaciones y velocidades están desfasadas $\pi/2$ en todo momento.

Ya sabemos que el conocimiento de la cinemática de un movimiento permite averiguar información sobre su dinámica, y viceversa. Si conocemos, como en el caso del MAS, la función que da el desplazamiento del sistema en función del tiempo (la ley de movimiento), podemos calcular su velocidad (como hemos visto) y su aceleración. Por otra parte, la aceleración de un sistema nos da información sobre las fuerzas que actúan. Veámoslo.

6.2. Fuerza en un MAS

Podemos determinar qué fuerza debe actuar sobre la partícula para que ésta efectúe un movimiento oscilatorio armónico. La aceleración de la partícula es la derivada de la velocidad, ecuación (356), con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cdot \cos\left(\omega t + \delta\right) \qquad (361)$$

La aceleración varía con el tiempo con la misma ley temporal que la coordenada de la partícula, $x \propto \cos(\omega t + \delta)$, ecuación (346), pero con una diferencia de fase de 180° (o radianes), porque la aceleración puede expresarse de la manera siguiente:

$$a = A\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \delta + \pi) \qquad (362)$$

Demostración

Para pasar de la ecuación (361) a la (362) hemos utilizado la relación trigonométrica para el $\cos(a + b)$ comentada en la ecuación (358), con un ángulo igual a π y otro igual a $\omega t + \delta$, de manera que:

$$\cos(\omega t + \delta + \pi) = \cos(\omega t + \delta) \cdot \cos(\pi) - \text{sen}(\omega t + \delta) \cdot \text{sen}(\pi) \qquad (363)$$

Derivada del seno

$$\frac{d\,\text{sen}\,x}{dx} = \cos x$$

Y si c es una constante,

$$\frac{d\,\text{sen}(cx)}{dx} = c \cdot \cos(cx)$$

es decir:

$$\cos(\omega t + \delta + \pi) = -\cos(\omega t + \delta) \tag{364}$$

También se llega al mismo resultado a partir de la figura 112 y las relaciones trigonométricas para los ángulos $\theta_1 = \theta + \pi/2$, y $\theta_2 = \theta + \pi$.

La relación (362) muestra que entre la aceleración y la posición, ecuación (346), el desfase es de π radianes, es decir, aceleraciones y desplazamientos son de signo contrario en todo momento:

$$a = -\omega^2 x \tag{365}$$

La fuerza que actúa sobre la partícula puede obtenerse a partir de la segunda ley de Newton en una dimensión, $F = ma$. Si utilizamos la expresión (361) obtenemos:

$$F = ma = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) \tag{366}$$

y si tenemos en cuenta la ecuación (365), podemos escribir:

$$F = -m\omega^2 x \tag{367}$$

es decir, existe una **relación lineal fuerza-desplazamiento**:

La fuerza que actúa sobre una partícula que describe oscilaciones armónicas es en cada momento proporcional al desplazamiento de la partícula, $F \propto x$, y de signo contrario al desplazamiento:

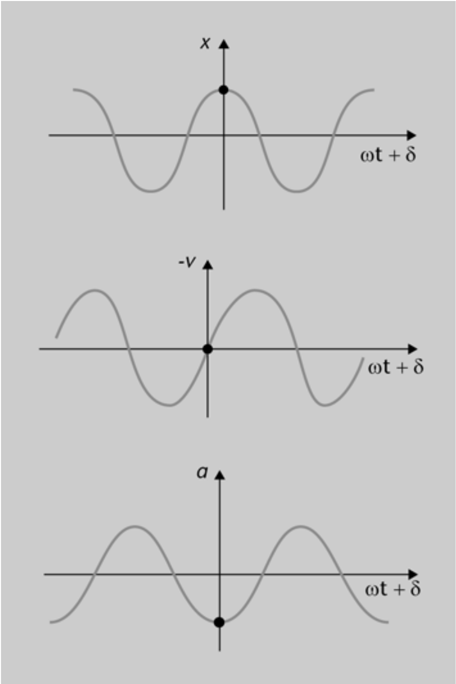
$$F = -kx \tag{368}$$

El signo menos que aparece en la expresión (368) indica que la fuerza está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento. Esto significa que si la partícula se mueve con valores positivos de la elongación, $x > 0$, la fuerza es negativa y va dirigida hacia el origen de coordenadas; mientras que si la partícula se mueve con valores negativos de la elongación, $x < 0$, la fuerza es positiva y va dirigida también hacia el origen de coordenadas.

Así, en todo MAS, independientemente de si la partícula se aleja del origen de coordenadas o si se acerca, la fuerza "recuperadora" que actúa sobre la partícula siempre tiende a volver a la posición vertical (en el caso de un péndulo) o a la posición inicial del muelle (en el que no estaba ni estirado ni comprimido).

En la figura 114 se representan la posición, la velocidad y la aceleración en un MAS, y puede observarse que posición y velocidad están desfasadas $\pi/2$, mientras que posición y aceleración están desfasadas en π radianes.

Figura 114. Elongación, *x*, velocidad, *v*, y aceleración, *a*, en un MAS



Vamos a ver ahora un ejemplo de sistema físico en el cual se cumple la relación (368), $F \propto x$: el muelle elástico.

6.2.1. El muelle elástico

Todos tenemos la experiencia de haber comprimido y estirado un muelle alguna vez: cuanto más lo estiramos o lo comprimimos, más nos cuesta mantener el muelle estirado o comprimido.

Un ejemplo de fuerza proporcional al desplazamiento y de signo contrario a éste es la que actúa sobre un cuerpo por parte de un resorte que se estira o se contrae (figura 115): la fuerza que ejerce el resorte es proporcional al alargamiento (o a la compresión) del resorte y siempre está dirigida de manera que el resorte tiende a recuperar su longitud normal. Si ejercemos una fuerza para comprimir el muelle, la reacción del muelle tiende a recuperar la longitud inicial. Y si ejercemos una fuerza para estirar el muelle, la fuerza de reacción del muelle tiende a reducir su alargamiento y recuperar también la longitud inicial. Esta fuerza se denomina *fuerza de restitución* o *fuerza recuperadora*.

Figura 115

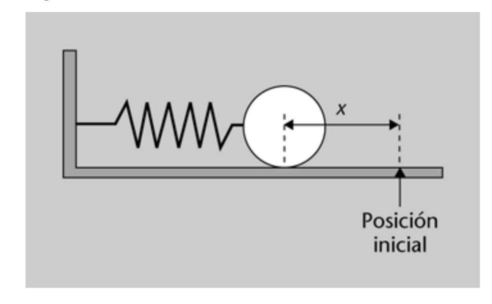


Figura 115

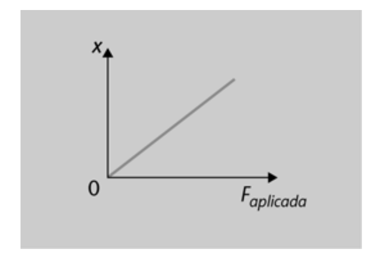
Masa unida a un muelle horizontal y que comprimimos desde la posición inicial. La fuerza recuperadora que ejerce el muelle comprimido es hacia la derecha.

Cuando estiramos un muelle (sin llegar a su límite elástico), el alargamiento adicional que le provocamos, x, es proporcional a la carga (es decir, a la fuerza) que le aplicamos, $F_{aplicada}$ (figura 116). Por lo tanto, podemos escribir la relación entre la extensión y la fuerza aplicada al muelle de la manera siguiente (en módulo):

$$F_{aplicada} = kx \tag{369}$$

donde k es la constante elástica del muelle. Un muelle de longitud inicial l, tendrá una longitud $l + x$, mayor o menor que l, cuando lo estiramos o lo comprimimos, respectivamente. El valor del alargamiento o la compresión del muelle coincide con la separación de la masa con respecto a su posición inicial, cuando está en equilibrio.

Figura 116. Relación entre la fuerza que aplicamos a un muelle y el alargamiento que le producimos



En un resorte que tenga una respuesta lineal como la descrita por la ecuación (369) el coeficiente k representa la **rigidez** del resorte: para una misma fuerza aplicada F, cuanto mayor sea k, menor será el alargamiento del resorte, el resorte será más rígido. De la misma manera que leemos cualquier cociente de magnitudes, podemos decir, de $k = F_{aplicada}/x$, que k representa la fuerza que debemos aplicar a un muelle por unidad de desplazamiento que le provocamos. La unidad en la que se mide la constante elástica de un resorte, k, es N/m = N m^{-1}.

Si recordáis el principio de acción y reacción (subapartado 3.4), la fuerza F que ejerce el muelle es igual y contraria a la que le aplicamos, $F = -F_{aplicada}$, y podemos escribir una expresión como la (369) para la fuerza que ejerce el muelle elático estirado o comprimido:

$$F = -kx \tag{370}$$

El signo negativo de la ecuación (370) indica que **fuerza y desplazamiento son contrarios**: las fuerzas restauradoras del muelle son de signo contrario a los alargamientos o las compresiones.

Si una vez alargado o comprimido el muelle, lo soltamos, la masa que está unida al muelle empezará a oscilar. Si comparamos la relación (370) con la (367), $F = -m\omega^2 x$, vemos que la frecuencia angular de oscilación del muelle es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{371}$$

La frecuencia de un sistema oscilante que oscila libremente se denomina **frecuencia propia** o **frecuencia natural**.

La dependencia funcional de la frecuencia natural de oscilación del muelle, ecuación (371), es la siguiente: la frecuencia angular de oscilación de un muelle depende de la rigidez del muelle y de la masa que oscila de la forma $\omega \propto k^{1/2}\, m^{-1/2}$.

El estiramiento de un muelle decimos que es elástico si cumple dos condiciones: 1) cuando soltamos el muelle, éste recupera su longitud inicial; y 2) si, además, las fuerzas aplicadas y los alargamientos provocados son proporcionales. Si estiramos mucho un muelle, éste puede quedar deformado al soltarlo, y no recuperará la longitud que tenía antes de estirarlo.

Ya hemos empleado muelles para medir fuerzas cuando hemos discutido las bases experimentales de la segunda ley de Newton en el aparado 4. Pero en aquella ocasión no especificamos que el muelle fuera elástico, porque no era necesario: únicamente necesitábamos construir un medidor de fuerzas, y eso requería que la relación estiramiento-fuerza fuese unívoca, no que fuese necesariamente lineal como la relación (370).

Vamos a observar ahora la oscilación del muelle y la frecuencia con que lo hace.

Actividad 6.5. Frecuencia de oscilación de un muelle

a) Comprobad que los dos miembros de la relación (371) se miden en las mismas unidades.

b) Explicad por qué oscila el muelle, si separamos la masa del punto de equilibrio.

Solución

a) La frecuencia angular de oscilación de un muelle elástico, definida por la relación (349), $\omega = 2\pi / T$, tiene unidades de s^{-1}. Veamos si la raíz que aparece en la expresión (371) tiene las mismas dimensiones.

La constante elástica del resorte se define en la relación (371) y se mide en newton por metro:

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{\text{N}}{\text{m}} \tag{372}$$

Como 1 N = 1 kg m/s^2 (ya que $F = ma$), el miembro de la derecha de la relación (371) se mide en:

$$\sqrt{\frac{[k]}{[m]}} = \sqrt{\frac{\text{N/m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2\text{m}}}{\text{kg}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{s}^2}} = \frac{1}{\text{s}} \tag{373}$$

Por lo tanto, los dos miembros de la ecuación (371) se miden en las mismas unidades, como debe ser en cualquier ecuación que utilicemos en física o en ingeniería.

b) ¿Por qué oscila un muelle que alargamos o comprimimos y lo soltamos? Si soltamos la masa que está unida a un muelle estirado, por ejemplo, la fuerza restauradora del mue-

lle la acelera en sentido contrario al estiramiento y le da más velocidad. La fuerza es mayor cuanto más alejada esté la masa de la posición inicial.

Al pasar por el punto inicial (en el que $x = 0$ y, por lo tanto, según la ecuación (370), $F = 0$ y $a = 0$) no actúa ninguna fuerza sobre la masa pero la masa tiene una velocidad determinada y, por inercia, continua moviéndose; ahora es la masa la que en su movimiento comprime el muelle cada vez más, y el muelle ejerce una fuerza en sentido contrario y cada vez mayor, que va frenando la masa hasta que en el punto de máxima elongación la detiene completamente.

Ahora, con el muelle comprimido al máximo, el muelle empuja la partícula de manera que la longitud del muelle tiende a recuperar la longitud que tenía inicialmente, y pone de nuevo la masa en movimiento acelerado en dirección hacia el origen de coordenadas. Y el ciclo vuelve a empezar, sin fin.

Vemos entonces, que la dinámica del sistema, la fuerza que actúa, nos permite determinar qué frecuencia tiene el movimiento oscilatorio.

6.2.2. ¿Qué hemos aprendido?

- Hemos calculado la fuerza que actúa sobre una partícula que describe un MAS.
- Hemos visto que en un MAS, fuerzas y elongaciones tienen signo contrario en todo instante y son proporcionales.
- En un muelle elástico, fuerzas (F) y elongaciones (x) son proporcionales, $F = -kx$, donde k es la constante elástica del muelle.

MAS

Un movimiento armónico simple es el que hace un objeto sobre el que actúa una fuerza proporcional y de signo contrario al desplazamiento de la partícula con respecto a la posición de equilibrio.

Un MAS está descrito por una función seno o coseno.

En este apartado hemos seguido la estructura de este módulo: primero hemos estudiado la cinemática (subapartado 6.1) y después la dinámica de un oscilador (subapartado 6.2). Ahora vamos a ver los aspectos energéticos del sistema oscilante.

6.3. Energía del oscilador

Lo que expondremos en este subapartado se aplica tanto a un muelle que oscila como a un péndulo, y también sirve para cualquier otro sistema oscilante, como puede ser una corriente eléctrica en un circuito. La única condición es que el sistema oscile con un MAS, es decir, que la relación entre la fuerza restauradora del sistema y el desplazamiento sea lineal, como en la ecuación (370):

$$F = -kx \qquad (374)$$

Podemos calcular la energía potencial del oscilador a partir de la definición de energía potencial en términos de las fuerzas del campo conservativo, ecuación (271):

$$\Delta E_{p\ a \to b} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (375)$$

Recordad

La integral de x es:

$$\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + constante$$

En una dimensión, y si aplicamos la relación (374), escribiremos:

$$\Delta E_p = \int kx \cdot dx \qquad (376)$$

es decir:

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}kx^2 + constante \qquad (377)$$

El origen de las energías potenciales es arbitrario, como hemos discutido en el apartado 5. Si escogemos la consante de la expresión (377) de manera que la energía potencial sea igual a cero en la posición de equilibrio de la partícula ($\Delta E_p = 0$ para $x = 0$), obtenemos:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (378)$$

El resultado es que la energía potencial de un oscilador que se ha desplazado una distancia x de la posición de equilibrio es proporcional al cuadrado del desplazamiento de la partícula. En términos matemáticos, a fuerzas lineales, proporcionales a x, corresponden energías potenciales cuadráticas, proporcionales a x^2.

Ahora sumamos las energías cinética, $1/2\ mv^2$, y potencial, ecuación (378), para encontrar la energía mecánica total de la partícula que oscila:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (379)$$

Como veremos en la actividad siguiente, si tenemos en cuenta las relaciones (346), (356) i (371), la relación anterior es, simplemente:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \qquad (380)$$

Observad que en esta ecuación sólo aparecen la masa, m, la amplitud de la oscilación, A, y la frecuencia angular, ω, que son magnitudes que no varían con el tiempo. Por lo tanto, resulta que la **energía se conserva**.

La energía total de un oscilador es constante.

Este resultado es consecuencia de la aplicación de la ley de conservación de la energía, que estudiamos en el apartado 5, en el caso del oscilador armónico, que es un sistema conservativo cuando no existe fricción.

Hemos obtenido, según la ecuación (380), que la energía total de un oscilador es proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilación. La energía del oscilador también es proporcional a la masa de la partícula que oscila y al cuadra-

do de la frecuencia de oscilación. Si la amplitud o la frecuencia de oscilación se duplican, la energía del oscilador se cuadruplica. Pero si se duplica el valor de la masa que oscila, la energía total del oscilador sólo se duplica.

En los sistemas reales, las oscilaciones de un sistema no se mantienen en el tiempo: una cuerda de guitarra que hacemos sonar acaba deteniéndose, por ejemplo. Por lo tanto, la **energía no se conserva** si el **oscilador tiene pérdidas**.

La energía total de un oscilador disminuye con el tiempo (no es, por lo tanto, constante), si el oscilador tiene fricción u otra fuente de pérdida de energía. En este caso se habla de **osciladores amortiguados**.

Vamos a ver ahora cómo son las dependencias temporales de las energía de un oscilador que conserva la energía total, es decir, para el cual las oscilaciones no se amortiguan.

Actividad 6.6. Energía de un oscilador en función del tiempo

a) Deducid la expresión (380) de la energía total del oscilador. Tened en cuenta las relaciones (346), (356) y (371).

b) Analizad cómo varían con el tiempo la energía cinética y la energía potencial del oscilador y confeccionad una gráfica de estas funciones.

Solución

a) Si sustituimos x por la ecuación (346) y v por la ecuación (356) en la expresión (379) obtenemos, para cada una de las energías:

$$\omega E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\text{sen}^2(\omega t + \delta) \quad (381)$$

$$E_p = k\frac{x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \delta) \quad (382)$$

donde hemos tenido en cuenta la relación (371) para eliminar la constante k en la ecuación (382). La energía total del oscilador es:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}\text{sen}^2(\omega t + \delta) + \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \delta) \quad (383)$$

Podemos sacar factores comunes $mA^2\,\omega^2 / 2$:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left(\text{sen}^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)\right) \quad (384)$$

y tener en cuenta la relación trigonométrica fundamental siguiente, válida para cualquier ángulo ϑ:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad (385)$$

Entonces llegamos a la conclusión de que la energía total del oscilador es constante en todo momento:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \quad (386)$$

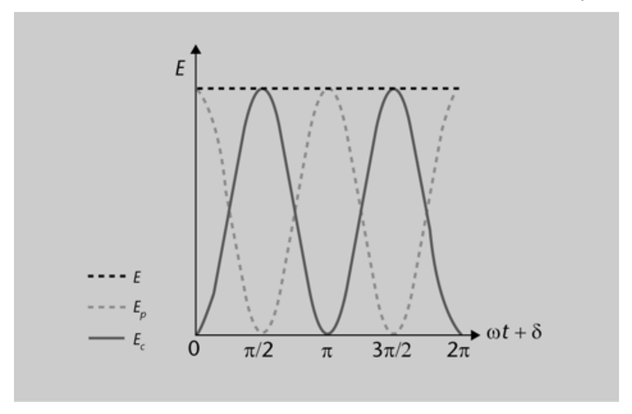
b) Las energías cinética y potencial del oscilador varían en cada punto de la oscilación, pero la suma de las dos es siempre constante.

En el extremo de oscilación, $x = A$, la energía potencial es máxima y la energía cinética se anula, porque el oscilador se detiene instantáneamente; en el centro de la oscilación

la posición es nula, igual que la energía potencial, y la energía cinética es máxima. En cualquier otro punto, cuando un tipo de energía se reduce en una cantidad, el otro tipo de energía aumenta en la misma cantidad.

En la figura 117 tenéis representada la variación temporal de la energía cinética del oscilador, ecuación (281), y la energía potencial del oscilador, ecuación (382). Observad que ambas energías son positivas y varían con el tiempo según las funciones $\text{sen}^2(\omega t + \delta)$ y $\cos^2(\omega t + \delta)$, respectivamente, así cuando una aumenta, la otra disminuye, de manera que la suma es siempre constante e igual a la energía total.

Figura 117. Energía cinética E_c, energía potencial E_p y energía total constante E del oscilador armónico en función del tiempo



Hemos visto que el proceso de la oscilación está relacionado con el paso periódico de la energía potencial a la cinética y viceversa. El valor medio (por periodo de oscilación) de las energías potencial y cinética es el mismo y vale la mitad de la energía total del oscilador, $E/2$:

$$< E_c > = < E_p > = \frac{E}{2} \tag{387}$$

donde $<E_c>$ y $<E_p>$ representan, respectivamente, el valor medio de la energía cinética y potencial de un oscilador en un ciclo, y E es la energía total, ecuación (380).

6.3.1. ¿Qué hemos aprendido?

- En el caso de un MAS, las expresiones de la energía cinética y potencial que hemos introducido en el apartado 5 toman valores oscilantes; durante un periodo existe un intercambio constante de una forma de energía a la otra.

- También hemos visto que la energía total de un sistema oscilante es constante, si no intervienen fuerzas externas al sistema. Este resultado está de acuerdo con el principio de conservación de la energía que enunciamos en el apartado 5.

Una vez vistas las características generales del movimiento oscilatorio, vamos a terminar el apartado con una discusión sobre el modelo del péndulo simple y las oscilaciones pequeñas que puede hacer un péndulo.

6.4. El modelo físico del péndulo

Hemos empezado este apartado estudiando la cinemática del movimiento oscilatorio para llegar a su dinámica y a las consideraciones energéticas de este tipo de movimiento. Aquí veremos cómo se puede establecer un planteamiento dinámico para llegar a las mismas conclusiones, es decir, abordaremos el estudio del oscilador con las leyes de la dinámica. Aprovecharemos para discutir en detalle el modelo el péndulo.

Un beneficio de la aproximación dinámica al movimiento es que nos permite obtener la frecuencia de oscilación del sistema que, como ya sabéis (véase el subapartado 6.2.1), se denomina *frecuencia propia* o *frecuencia natural*.

En física se trabaja con un modelo denominado *péndulo simple*, del que ya hemos hablado en el subapartado 6.1. Un péndulo simple está constituido por una masa unida a un hilo no extensible que cuelga de un punto (figura 118).

Si el péndulo está inicialmente detenido, lo encontraremos colgando verticalmente (figura 118). En estado de reposo, no actúa ninguna fuerza neta sobre el péndulo y éste no se mueve.

Figura 118

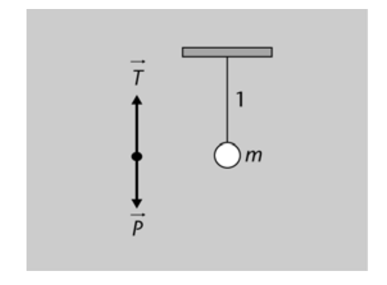


Figura 118

Un péndulo y las fuerzas que actúan cuando está en reposo. La tensión del hilo equilibra la fuerza del peso.

Sobre la masa del péndulo actúan el peso, P, y la reacción del hilo, la denominada *tensión* del hilo, y ambas fuerzas se equilibran porque tienen direcciones opuestas y el mismo módulo:

$$\vec{P} = -\vec{T} \tag{388}$$

El péndulo está en reposo porque no actúa ninguna fuerza neta (o resultante). Tenemos dos fuerzas que actúan sobre el péndulo y, por lo tanto, existen también dos fuerzas de reacción que el péndulo ejerce sobre otros cuerpos.

Nota

En un mismo apartado nos hemos encontrado con el problema de designar dos magnitudes que no tienen nada que ver entre sí con el mismo símbolo, T: tensión de un hilo y periodo de un péndulo oscilante. El contexto dejará claro a cuál nos referimos en cada caso.

Actividad 6.7. Fuerzas de reacción

¿Cuáles son estas dos fuerzas de reacción que ejerce el péndulo y que hemos mencionado en el párrafo anterior?

Solución

El hilo ejerce una fuerza vertical y hacia arriba sobre la masa m, una fuerza que denominamos *tensión*, $\vec{T}$. Por lo tanto, la masa tira del hilo hacia abajo con una fuerza de reacción $\vec{R} = -\vec{T}$ (figura 119a).

La Tierra atrae la masa m con una fuerza que denominamos *peso*, $\vec{P} = m\vec{g}$. Por lo tanto, la masa m ejerce una fuerza igual y contraria sobre la Tierra, la reacción $\vec{R} = -\vec{P}$ (figura 119b).

Para completar el análisis, también podemos considerar el par de fuerzas de acción-reacción que actúan en el punto de sujeción del hilo al techo: la fuerza que ejerce el hilo sobre el techo, $\vec{F}$, es idéntica y de sentido contrario a la tensión del hilo, $\vec{F} = -\vec{T}$, y también es igual y contraria a la que el techo ejerce sobre el hilo, la reacción $\vec{R} = -\vec{F}$ (figura 119c).

Figura 119. Fuerzas de acción y reacción en un péndulo en reposo

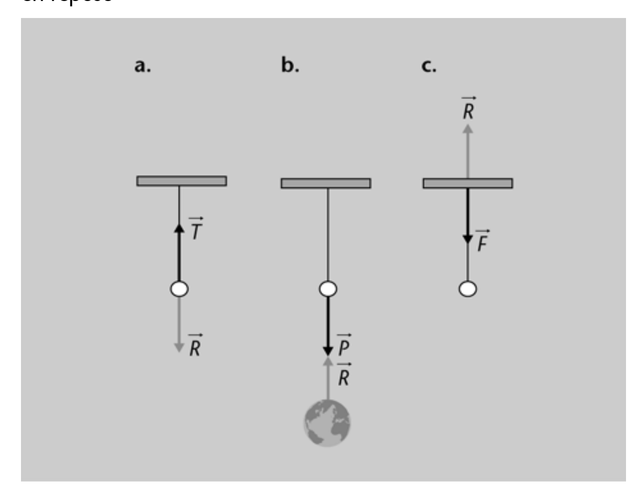


Figura 119

Se muestra el par acción-reacción del hilo (**a**), de la masa (**b**) y del punto de sujeción del hilo (**c**).

Una vez hecho el análisis del péndulo estático estudiaremos el péndulo en movimiento.

6.4.1. Oscilaciones pequeñas

En un oscilador que describe un movimiento oscilatorio cualquiera, el desplazamiento puede no venir dado por la función trigonométrica (346). Pero en muchos casos las oscilaciones de un sistema son, en efecto, en forma de MAS, al menos para valores pequeños de la amplitud del movimiento. Se dice entonces que para pequeñas separaciones con respecto a la posición de equilibrio, el sistema oscila con **oscilaciones pequeñas** o, equivalentemente, las oscilaciones son movimientos armónicos.

Ya hemos visto qué significan las oscilaciones pequeñas para un muelle elástico que oscila: la fuerza recuperadora debe depender linealmente del desplazamiento de la masa y, en este caso, el sistema oscila con un MAS. ¿Cuáles serán las oscilaciones pequeñas para un péndulo? Debemos estudiar la dinámica del péndulo.

Desviamos el péndulo un ángulo determinado, α, de su posición de equilibrio y lo dejamos oscilar. Debemos determinar la fuerza que actúa sobre él.

Podemos descomponer el peso del péndulo, $\vec{P} = m\vec{g}$, en dos componentes (figura 120), una a lo largo del hilo (tangente al hilo) y la otra perpendicular al hilo. La primera componente, $P \cdot \cos\alpha$, compensa la tensión del hilo, T, cuando el péndulo está en la posición de máxima separación con respecto a

la vertical; la segunda componente origina el movimiento acelerado del péndulo.

Figura 120

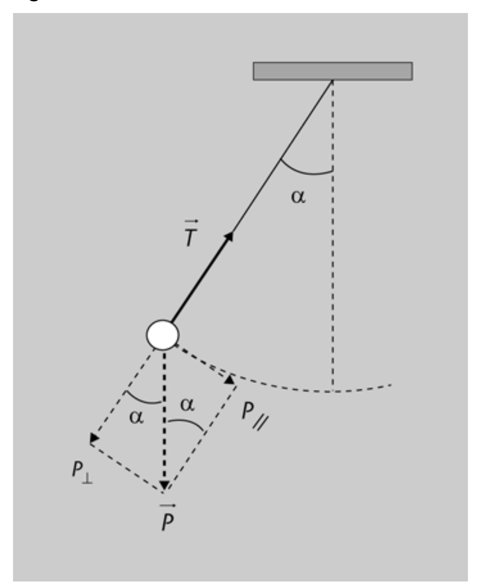


Figura 120

Péndulo simple y componentes del peso tangente a la trayectoria, $P_{//}$, y perpendicular a la trayectoria (es decir, en la dirección del hilo), $P_{\perp}$. Esta fuerza, $P_{\perp}$, iguala la tensión del hilo sólo en los extremos de la trayectoria, cuando la partícula está instantáneamente detenida y, por lo tanto, no existe fuerza centrípeta.

De esta manera, la componente del peso tangente a la trayectoria es la fuerza neta que actúa en esta dirección en cualquier posición del oscilador:

$$P_{//} = -mg \cdot \text{sen}\ \alpha \qquad (389)$$

El signo menos en la ecuación (389) tiene en cuenta que para ángulos negativos la dirección de $P_{//}$ es en sentido horario y para ángulos positivos la dirección de $P_{//}$ es en sentido antihorario. Si $\alpha < 0$, sen $\alpha < 0$, y entonces $-mg \cdot \text{sen}\ \alpha > 0$, es decir, $P_{//}$ va en sentido horario. Si hubiésemos hecho la descomposición de la figura 120 para un ángulo positivo, entonces $\alpha > 0$ y sen $\alpha > 0$. El signo negativo de la ecuación (389) indicaría que ahora $P_{//}$ va en sentido antihorario.

Ángulos positivos y negativos

Recordemos que medimos ángulos positivos en el sentido horario a partir de la vertical, y los negativos en sentido contrario.

Pero la fuerza neta (389) que actúa sobre el péndulo en la dirección tangente a la trayectoria *no* es proporcional al desplazamiento angular, es decir, no es proporcional al ángulo. La fuerza neta ahora depende del seno del ángulo. Podríamos obtener la dinámica del oscilador en el caso más general, y resolver la ecuación diferencial que se obtiene de sustituir la expresión (389) de la fuerza que acelera el péndulo, en la segunda ley de Newton, $F = ma$. La ecuación diferencial resultante no tiene solución analítica, y debe resolverse con la ayuda de un ordenador. El caso particular más importante en la práctica, es el de las oscilaciones pequeñas.

Desarrollo de Taylor para el seno

$$\text{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

donde el ángulo *x* se mide en radianes.

En el caso de oscilaciones pequeñas, el ángulo α es pequeño, medido en radianes:

$$\alpha << 1 \qquad (390)$$

y puede aproximarse el seno por el ángulo (el primer término de la fórmula de Taylor):

$$\text{sen}\ \alpha \approx \alpha \qquad (391)$$

de manera que la ecuación (389) resulta:

$$F \approx -mg\,\alpha \qquad (392)$$

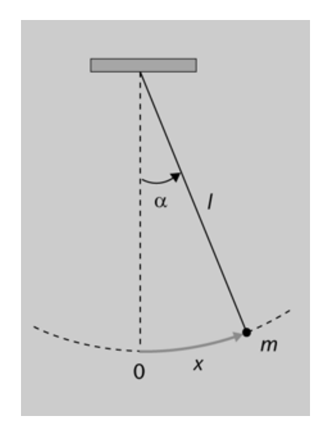
En estas condiciones sí que son proporcionales fuerzas y desplazamientos angulares, y el movimiento pendular sería un MAS, como veremos después.

Arco y ángulo

Sobre una circunferencia de radio l podemos definir un ángulo α como el cociente entre la longitud del arco y el radio de la circunferencia:

$$\alpha = x / l$$

Figura 121. Arco x y ángulo α que lo define, sobre una circunferencia de radio l



Actividad 6.8. Ángulos pequeños

a) ¿Para qué ángulos, en grados, se cumple la condición de ángulos pequeños, ecuación (390)?

b) Comprobad con una calculadora manual si la aproximación es buena para los ángulos de 10° o 30° (391).

Solución

a) La aproximación (391) sólo es válida cuando los ángulos se miden en radianes.

Una circunferencia tiene 2π radianes y, por lo tanto, un radián corresponde a:

$$1 \text{ radián} = 1 \text{ radián} \cdot \frac{360 \text{ grados/círculo}}{2\pi \text{ radianes/círculo}} = 57{,}3 \text{ grados} \qquad (393)$$

La condición $\alpha << 1$ significa que el ángulo de oscilación debe ser mucho más pequeño que 1 radián (que como habéis visto en (393), equivale a unos 60°).

En la práctica, amplitudes angulares de 20-30° (que *no* son << 60°) dan movimientos oscilatorios que pueden describirse como MAS con buena aproximación.

b) Para 10°, α = 0,1745 radianes, mientras que sen 0,1745 = 0,1737. Ambos valores, α y sen α, coinciden en las primeras dos cifras decimales.

Para 30°, α = 0,5236 radianes, y sen 0,5236 = 0,5. Ahora sólo coincide la primera cifra decimal del valor del ángulo y del seno del ángulo.

Ya estamos en condiciones de calcular la frecuencia de oscilación del péndulo, que es el resultado principal que obtendremos de la aplicación de la segunda ley de la dinámica al problema del oscilador. Vamos a verlo.

6.4.2. Periodo y gravedad

El camino x recorrido por el punto material medido sobre la trayectoria circular que describe el péndulo es (figura 121):

$$x = l\alpha \qquad (394)$$

La expresión anterior sólo tiene sentido si el ángulo se mide en radianes y proviene de la definición de ángulo, como el cociente del arco por el radio con el que se traza el arco. Por lo tanto, escribiremos la expresión (392) de la manera siguiente:

$$F = -\frac{mg}{l}x \qquad (395)$$

y cuando la comparamos con la ecuación (374), $F = -kx$, la constante k es ahora:

$$k = \frac{mg}{l} \tag{396}$$

Por lo tanto, la frecuencia angular del péndulo será, según la ecuación (371), que nos dice $\omega = \sqrt{k/m}$, cuando introducimos el valor de k de la ecuación (396):

$$\omega = \sqrt{\frac{mg/l}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{397}$$

La expresión anterior, $\omega = \sqrt{g/l}$, es la frecuencia angular natural o propia del péndulo cuando describe pequeñas oscilaciones.

El periodo de las oscilaciones se obtiene a partir de la relación (348), $T = 2\pi/\omega$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{398}$$

Vemos que cuando las oscilaciones son pequeñas, el periodo de la oscilación depende sólo de la longitud l del péndulo y de la intesidad del campo gravitatorio, g.

También debéis notar que la frecuencia angular, ecuación (397), no depende de la amplitud de la oscilación ni tampoco depende de la masa que oscila. En este sentido, el péndulo simple es un sistema diferente del muelle elástico, porque la frecuencia de oscilaciones del muelle, ecuación (371), $\omega = \sqrt{k/m}$, sí que depende de la masa oscilante m.

El ángulo máximo, α_m, que forma el péndulo en cada oscilación se obtiene de la ecuación (394), cuando sustituimos el desplazamiento por la amplitud:

$$A = l \cdot \alpha_m \tag{399}$$

α_m es, pues, la amplitud angular del oscilador.

Podemos obtener la ecuación que describe la posición instantánea del péndulo en términos de desplazamientos angulares, en lugar de desplazamientos lineales. Si trasladamos la expresión (394), $x = l\alpha$, a la (346), $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, y empleamos la ecuación (399), obtenemos la ecuación de movimiento del péndulo en función del ángulo que forma con la vertical:

$$\alpha(t) = \alpha_m \cdot \cos(\omega t + \delta) \tag{400}$$

De la misma manera, podrían escribirse para el péndulo simple, en función del ángulo de oscilación, todas las expresiones que hemos discutido en los apartados anteriores, como la de la velocidad, la aceleración, etc.

Actividad 6.9. Un péndulo que tenga un periodo de 1 s

¿Qué longitud debe tener un péndulo para que su periodo de oscilación sea de un segundo, o su frecuencia de 1 Hz?

Solución

En la expresión (398) queremos que el periodo del péndulo sea 1 s y queremos conocer su longitud:

$$T = 1\,\text{s} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \tag{401}$$

Al despejar l obtenemos:

$$l = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left(\frac{1\ \text{s}}{2\pi}\right)^2 = 0{,}2485\ \text{m} = 24{,}85\ \text{cm} \tag{402}$$

Con un péndulo que tenga un hilo de un poco más de un palmo y una masa cualquiera, las oscilaciones pequeñas tendrán una frecuencia de 1 Hz y nos permitirá contar fácilmente el paso de los segundos a fuerza de contar el número de oscilaciones: cada oscilación completa tardará 1 s.

Concluiremos el apartado mostrando la ecuación diferencial de un MAS.

6.4.3. Frecuencia natural y ecuación diferencial del MAS

La frecuencia angular de oscilación de la masa unida al muelle depende de las propiedades del sistema oscilante:

a) de la rigidez de la fijación del cuerpo al muelle, k, y de la masa del cuerpo, m, en el caso del muelle elástico, ecuación (371);

b) de la longitud del hilo, l, y de la aceleración de la gravedad, g, en el caso del péndulo que oscila con oscilaciones pequeñas, ecuación (397).

Pero la frecuencia angular de oscilación no depende de la amplitud de la oscilación. Un mismo cuerpo que oscile con oscilaciones de amplitud diferente, lo hace con la misma frecuencia (el mismo periodo). Esta es una propiedad importante de los péndulos que oscilan con oscilaciones pequeñas, o de los muelles elásticos. La amplitud de oscilación de un sistema depende de la forma como lo hemos excitado, es decir, de como lo hemos puesto a oscilar.

Como ya hemos dicho (subapartado 6.2.1), las oscilaciones de un sistema que oscila libremente se denominan *oscilaciones propias*, y la frecuencia de las oscilaciones que tienen lugar en este caso se denomina *frecuencia natural* o *frecuencia propia* del sistema.

La ecuación diferencial que describe la dinámica de un MAS tiene una forma característica que se obtiene de aplicar la segunda ley de Newton a un sistema que describe un movimiento unidimensional bajo una fuerza del tipo $F = -kx$. Veámoslo.

A partir de la segunda ley de Newton para un movimiento unidimensional, $F = ma$, y recordando la expresión de la aceleración en un movimiento unidimensional a lo largo del eje X, $a = d^2x/dt^2$ (ecuación 117), obtenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (403)$$

que se suele escribir de la forma siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (404)$$

con la constante positiva $\omega^2 = k/m$.

La ecuación diferencial anterior establece que la derivada temporal segunda de la función desplazamiento coincide con la propia función multiplicada por una constante positiva y cambiada de signo.

Cualquier sistema cuya dinámica conduce a una ecuación diferencial del tipo (404) corresponde a un MAS que puede describirse por una ley de movimiento armónico, como la ecuación (346):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \qquad (405)$$

De esta manera hemos conectado la dinámica del oscilador con su cinemática.

6.4.4. ¿Qué hemos aprendido?

- Un sistema oscilante puede oscilar con pequeñas oscilaciones en las que la fuerza restauradora varía linealmente con el desplazamiento. En este caso, el sistema describe un MAS.
- La frecuencia natural o propia de cada sistema oscilante depende de los parámetros del sistema, y no de las condiciones de excitación.
- La ecuación diferencial de un MAS tiene una forma característica, al igual que un movimiento con aceleración constante –por ejemplo– satisface una ecuación diferencial característica.

6.5. Recapitulación

En este apartado hemos podido aplicar casi todos los conceptos, lenguajes y leyes físicas que hemos aprendido en este módulo de mecánica.

El tipo de movimiento concreto que hemos estudiado, el vibratorio u oscilatorio, es uno de los movimientos básicos que puede tener un sistema de partículas, y es único entre los sistemas físicos dinámicos.

El gran número de términos que hemos introducido en este apartado es una muestra de la riqueza de los fenómenos oscilatorios: periodo, frecuencia, fase, amplitud, frecuencia natural, etc.

Hemos introducido los modelos de péndulo simple y de muelle elástico, y también la aproximación de oscilaciones pequeñas para estos sistemas.

El movimiento armónico simple (MAS) puede describirse con funciones trigonométricas básicas.

Las oscilaciones de un sistema pueden ser la fuente de fenómenos ondulatorios que se propagan por el espacio o por un medio material.

6.6. Problemas de ampliación

Problema 6.1. Proyección de un movimiento circular uniforme

Mostrad que la proyección $x(t)$ de la posición de una partícula que gira en círculo a velocidad angular ω constante, oscila con una oscilación armónica (ω es el ángulo que gira la partícula por unidad de tiempo).

Problema 6.2. Dependencias funcionales

La relación (380):

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \tag{406}$$

indica una proporcionalidad, $E \propto m$. Pero si sustituimos ω^2 por la relación (371):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{407}$$

la energía resulta independiente de la masa:

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \frac{k}{m} = \frac{1}{2} k A^2 \tag{408}$$

¿No existe aquí una contradicción?

Problema 6.3. Medida del periodo

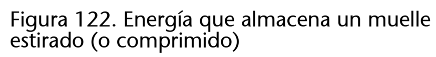
Podemos medir el periodo de oscilación de un péndulo simple con la ayuda de un cronómetro, como el que llevan muchos relojes. Si recordamos el concepto de tiempo de reacción del apartado 1, esta medida estará afectada por un error. ¿Qué ocurre si medimos, por ejemplo, diez oscilaciones seguidas? ¿mejorará entonces la calidad de la medida (es decir, estará afectada de un error menor)?

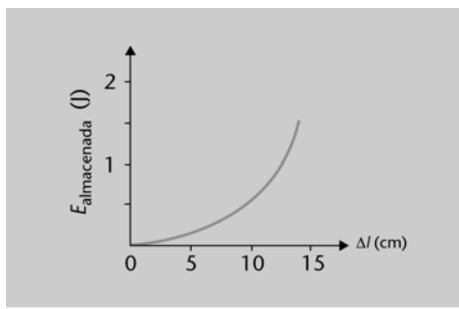
Problema 6.4. Conservación de energía en un péndulo oscilante

Separamos la bola de un péndulo de su posición vertical y la soltamos. ¿Cómo podemos describir sus oscilaciones en términos energéticos? ¿Qué podemos decir de su punto más bajo y de los puntos extremos de la oscilación?

Problema 6.5. Constante elástica

Calculad la constante elástica de un muelle para la que se han medido los datos de la figura 122.


Figura 122. Energía que almacena un muelle estirado (o comprimido)



7. Soluciones de los problemas de ampliación

Solución del problema 1.1

Para describir estas dos situaciones necesitamos más conceptos de los que hemos visto en este apartado exploratorio. Como veremos en los apartados siguientes, las palabras clave para describir estos procesos son *inercia*, *energía cinética*, *energía potencial*, *fricción*, etc. ¡Volveremos sobre ello!

Solución del problema 1.2

Como las tres gráficas posición-tiempo son líneas rectas, las tres muestran cuerpos que se mueven con una velocidad constante que viene dada por el gradiente o la pendiente constante de la recta.

a) La primera corresponde a un objeto que no empieza a moverse hasta que pasa un tiempo determinado.

b) En el segundo caso, el objeto arranca en el instante $t = 0$ desde un lugar diferente al origen de posiciones, y se aleja.

c) El tercer caso es como el segundo, el cuerpo arranca en el instante $t = 0$ desde una posición $s > 0$, pero tiene una velocidad constante negativa, es decir, la partícula se dirige hacia el origen, se acerca a él.

Solución del problema 1.3

En ambos casos se trata de movimientos a velocidad no constante (no son gráficas posición-tiempos lineales). Los vehículos se empiezan a mover desde el origen ($s = 0$) en el instante inicial ($t = 0$), y se alejan de él.

En el primer caso, el espacio recorrido aumenta de manera indefinida y cada vez más deprisa. En el segundo caso, el espacio recorrido aumenta rápidamente al principio pero a medida que el tiempo pasa, la velocidad se reduce y el espacio recorrido no aumenta tan rápidamente.

También podemos decir que en el primer caso la pendiente inicial es nula y va aumentando rápidamente con el tiempo; el movimiento del vehículo es acelerado. En el segundo caso, el vehículo empieza con una velocidad grande, porque la curva tiene una pendiente grande en $t = 0$, y se va frenando poco a poco; es un movimiento que se frena con el tiempo, es decir, la aceleración es negativa.

Solución del problema 1.4

Entrad en la página web de la simulación.

Si se modifica la altura de la colina que hay delante del punto de salida, o si aumenta el radio del bucle, el carrito no completa el recorrido y vuelve al punto de partida.

Si elevamos suficientemente la colina de salida o le damos una velocidad de salida suficiente, el carrito descarrila (¡y sale despedido!).

Solución del problema 1.5

Si el coche se mueve por la superficie de la Tierra, con dos coordenadas basta, como hemos visto en la actividad 1.9. Por ejemplo, podríamos dar su longitud y su latitud (como las que hoy en día nos da el GPS).

En el caso de una noria bastaría con dar el ángulo que forma el radio del carrito (la línea que une la posición del carrito con el centro de la noria) con una recta horizontal.

Figura 123

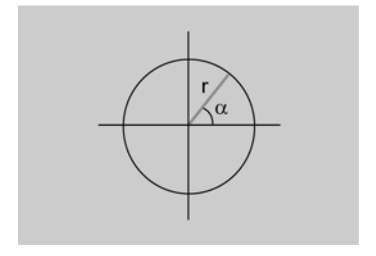


Figura 123

La posición de un objeto en un círculo puede darse mediante el ángulo que forma la recta que une el centro del círculo con la posición instantánea del objeto, con respecto a una recta horizontal que tomamos como origen de ángulos.

La función $\alpha(t)$ da la posición instantánea del carrito. Asimismo, no se trata de un movimiento unidimensional, sino bidimensional; la otra función que necesitamos para describir su posición es:

$$r = constante \qquad (409)$$

si r es el radio de la noria.

En lugar de las magnitudes (r, α), que se denominan *coordenadas polares* del punto que se mueve sobre el círculo, podemos dar las coordenadas cartesianas (x,y) del punto del plano.

En el caso del tiovivo, se trata también de un movimiento bidimensional: la cabeza de los caballitos del tiovivo, por ejemplo, no se mueve en línea recta sino que hace un movimiento de subida y bajada durante la curva.

El movimiento del taladro es unidimensional: podemos caracterizarlo si damos la altura sobre la vertical a la que se encuentra en cada instante cualquier punto de la máquina.

Solución del problema 2.1

a) El vehículo va a 20 m/s, porque:

$$72\frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\frac{1.000\ \text{m}}{60\ \text{min}\times 60\ \text{s/min}} = \frac{72.000}{3.600}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (410)$$

Por lo tanto, una velocidad típica por carretera es de unos 20-30 m/s.

b) Una velocidad de 10 m/s son 36 km/h, porque es la mitad de la velocidad del caso anterior. Por lo tanto, una velocidad típica de un coche por ciudad es de menos de unos 10 m/s, aproximadamente la misma que tiene el récord mundial de 100 m lisos.

c) ¡Viajamos a unos 30 km/s = 30.000 m/s! Es una velocidad enorme: nos vemos en todo momento en una nave espacial (la Tierra) que viaja por el universo a 30 km por segundo.

Esta velocidad se obtiene de dividir la longitud de la circunferencia ($2\pi r$, con $r = 1{,}5 \times 10^8$ km) que recorre la Tierra alrededor del Sol por el tiempo que tarda en hacerlo (1 año):

$$\frac{2\pi r}{1\,\text{año}} = \frac{2\pi\times 1{,}5\times 10^8\ \text{km}\times \dfrac{1.000\ \text{m}}{\text{km}}}{365\ \text{días}\times\dfrac{24\,\text{h}}{\text{día}}\times 60\dfrac{\text{min}}{\text{h}}\times\dfrac{60\,\text{s}}{\text{min}}} = 29.886\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 30.000\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (411)$$

Solución del problema 2.2

Como son gráficas posición-tiempos lineales, se trata de partículas que se mueven a velocidad constante. Sólo necesitamos calcular el gradiente (la pendiente) de la línea recta:

a) $$\textit{Pendiente} = v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3{,}0\ \text{m} - 0\ \text{m}}{5\ \text{s} - 0\ \text{s}} = 0{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (412)$$

b) $$\textit{Pendiente} = v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5\,\text{m} - 3\ \text{m}}{5\,\text{s} - 0\,\text{s}} = 0{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (413)$$

Solución del problema 2.3

La gráfica representa un cuerpo que se mueve a velocidad constante v durante un tiempo t_A.

Para una partícula que se mueve a velocidad constante durante un tiempo t, la distancia recorrida en este tiempo es el producto:

$$d = v \cdot t \quad (414)$$

Luego, la distancia recorrida por el vehículo durante el tiempo t_A es equivalente al área que hay debajo de la gráfica, $v_A \cdot t_A$, porque el área de un rectángulo es el producto de su base por su altura.

También podemos decir que la distancia recorrida coincide con la integral definida de la función velocidad entre el instante inicial y el instante t_A:

$$d = \int_0^{t_A} v \cdot dt \tag{415}$$

Solución del problema 2.4

En los tres casos se trata de objetos cuya velocidad cambia con el tiempo y, por lo tanto, tienen un movimiento acelerado. Como son líneas rectas (con gradientes y pendientes constantes) los tres casos muestran aceleraciones constantes.

En el primer y segundo caso, el cuerpo está acelerado, porque la pendiente aumenta con el tiempo.

La tercera recta tiene una pendiente negativa, por lo tanto el cuerpo representado en el gráfico está frenando (desacelerando o acelerando negativamente).

En el primer caso, el cuerpo empieza a moverse desde el reposo, $v = 0$, en $t = 0$. En el segundo caso, empieza con velocidad no nula. En el tercer caso, el cuerpo se está moviendo a una velocidad determinada en el instante inicial y a medida que pasa el tiempo la velocidad se reduce.

Solución del problema 3.1

Si el vehículo se mueve en línea recta y a una velocidad constante (en módulo, dirección y sentido), es, en efecto, un sistema de referencia inercial.

Una persona difícilmente puede moverse a velocidad constante (además, el caminar o correr de una persona no es estrictamente en línea recta sino que oscila en cada paso). Por lo tanto, no puede ser un sistema inercial.

Ya hemos comentado en el subapartado 3.1 que la Tierra sólo puede considerarse un sistema inercial cuando analizamos movimientos que duran poco en comparación con el movimiento de la Tierra. A efectos prácticos, y para experimentos que duran poco tiempo, la Tierra tiene un movimiento casi rectilíneo y uniforme porque su órbita alrededor del Sol tiene un radio enorme, de un centenar y medio de millones de kilómetros. Por eso utilizamos como sistemas inerciales sistemas de referencia solidarios a la Tierra.

Solución del problema 3.2

Supongamos que hace viento y que viajamos en un vehículo que va a velocidad rectilínea y uniforme. Visto desde el vehículo, nosotros estamos en reposo y son los objetos exteriores al vehículo (un árbol, por ejemplo) los que se mueven a velocidad rectilínea y uniforme *contraria* a nosotros. Esto vale también para el aire. Para nosotros, es como si hiciese viento en el mismo sentido que vemos desplazarse los árboles.

Por lo tanto, cuando dejamos caer el objeto, y visto desde el tren en movimiento, la fricción con el aire hará que el objeto se desplace en la dirección en que se mueven los árboles, contraria a nuestro movimiento, en vez de verticalmente como caería una piedra. Visto desde el tren, el objeto parece que se va hacia atrás de la ventana. La trayectoria del objeto será parabólica.

Visto desde la estación, el objeto no cae en la dirección de la vertical de la ventana. Si no hace viento, visto desde la estación, el objeto siempre avanza desde el punto de caída, con o sin rozamiento.

Si el objeto presenta mucha fricción con el aire (como es el caso si lanzamos un papel en lugar de una piedra), visto desde la estación, el objeto describe una trayectoria más complicada que una parábola, más corta que si no hubiese rozamiento.

Cuanto mayor sea la superficie del objeto que cae, mayor será el arrastre en sentido contrario al movimiento del vehículo, porque la fricción con el aire será mayor.

Solución del problema 4.1

La pelota tiene muy poco rozamiento contra el suelo y, cuando el vehículo arranque, permanecerá en la misma posición del espacio porque no está fijada al vehículo, como lo están los asientos. Al no estar fijada al suelo, tiende por inercia a conservar el estado de reposo que tenía antes de que el vehículo arrancara, de manera que no se moverá hacia adelante con el vehículo.

Pero tampoco se moverá hacia atrás, porque no existe ninguna fuerza en esta dirección. La pelota sólo se moverá hacia adelante cuando la parte posterior del vehículo pase por la posición que ocupa la pelota y la arrastre.

El efecto del movimiento del vehículo es como si la pelota retrocediera al ir a golpear la parte posterior del vehículo.

Solución del problema 4.2

a) Falso. En un movimiento rectilíneo y uniforme tampoco actúa ninguna fuerza, o bien la resultante de las fuerzas que actúan es 0.

b) Las cuestiones son diferentes y también lo son las respuestas. Para mantener un cuerpo en movimiento rectilíneo y uniforme no es necesario hacer nada, no se debe aplicar ninguna fuerza. Pero para que un cuerpo en movimiento se detenga, es necesario aplicar una fuerza. Es la primera ley de Newton, la ley de la inercia.

c) Falso. El movimiento (casi) circular de la Luna es un movimiento acelerado, porque la dirección de la velocidad cambia de manera constante. En cada instante, la fuerza gravitatoria terrestre provoca la aceleración de la Luna, de acuerdo con la segunda ley de Newton. La primera ley de Newton no es aplicable a esta situación, porque la Luna no está ni en reposo ni en movimiento rectilíneo y uniforme.

Solución del problema 4.3

Si el libro no se mueve es porque la fuerza que ejercemos sobre él es exactamente contrarrestada por el rozamiento, por la fuerza de fricción que actúa entre el libro y la mesa, en la superficie de contacto de ambos objetos. Por lo tanto, a una fuerza neta nula (la suma de la fuerza aplicada y la fuerza de fricción que ejerce la mesa) le corresponde una aceleración nula. El objeto, que está inicialmente en reposo, continúa en reposo.

Pero la fricción entre dos objetos que no se mueven (lo que se denomina fricción estática) tiene un valor máximo determinado, que depende de las superficies de los objetos que están en contacto.

Por lo tanto, si inicialmente el libro no se mueve y aplicamos una fuerza un poco mayor, el rozamiento aumenta también en el mismo valor y el libro no se moverá. Pero llegará un momento en el que la fuerza aplicada superará la fricción y podremos acelerarlo, porque entre los dos cuerpos la fuerza de fricción tiene un valor máximo.

Solución del problema 4.4

En los tres casos vemos que el vehículo que cambia de estado de movimiento (en reposo o rectilíneo y uniforme) contiene partes que no están rígidamente unidas al vehículo: es el caso de los pasajeros del coche del caso a), de la persona que va de pie en el caso b) y de los órganos internos de nuestro cuerpo en el caso c). Cuando el vehículo frena o se acelera, las partes que no están rígidamente unidas al vehículo tienden (por el primer principio) a continuar su movimiento rectilíneo y uniforme.

En el caso **a** nuestro cuerpo choca contra la puerta del coche porque es el coche el que cambia su dirección de movimiento (se acelera en la curva).

En el caso **b** los pies están bastante fijados al suelo del autobus por el rozamineto de la suela de los zapatos; cuando el vehículo frena, la parte superior del cuerpo sigue moviéndose en línea recta: por esta razón parece que nos empujan hacia adelante.

En el caso **c** nuestro cuerpo se mueve hacia abajo con el coche que baja, pero nuestros órganos internos tienden a quedarse a la misma altura en la que se encontraban y moviéndose en línea recta, por eso tenemos la sensación de que "se nos suben", cuando en realidad es el resto del cuerpo el que "baja".

Solución del problema 4.5

Debéis tener cuidado con la idea de que la gravedad es un efecto del aire o la atmósfera, o que la gravedad ejerce una fuerza que "empuja" hacia abajo, en lugar de ser una fuerza que "estira" hacia abajo.

a) Falso. La fuerza gravitatoria no tiene nada que ver con la atmósfera, sólo es debida a la Tierra (¡la Tierra también atrae la atmósfera!).

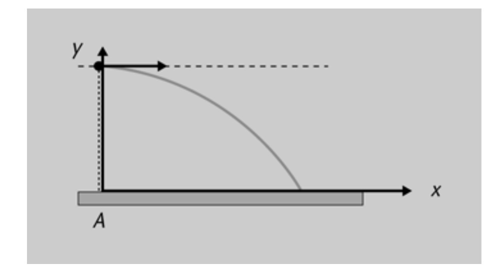
b) Un globo lleno de aire cae al suelo porque el conjunto del globo más el aire que contiene es más denso que el aire y la fuerza gravitatoria sobre el globo inflado supera el empuje hacia arriba que la atmósfera ejerce sobre el globo.

c) El globo caería en caída libre si lo pusiésemos dentro de un espacio vacío, sin aire, porque únicamente actuaría la gravedad terrestre.

No es cierto que la gravedad desaparezca con ausencia de aire. En el espacio exterior a la Tierra no existe materia (existe el vacío) y los cuerpos celestes se atraen por fuerzas gravitatorias.

Solución del problema 4.6

Figura 124. Una pelota recibe un golpe que hace que se mueva horizontalmente en el instante inicial



La ecuación del movimiento se puede obtener de la aplicación de la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (416)$$

El análisis de esta situación se simplifica si tenemos en cuenta que las componentes horizontal y vertical del movimiento se pueden tratar de manera separada, de acuerdo con el principio de superposición de las fuerzas.

Las condiciones iniciales del problema son:

1) que la pelota está en $t = 0$ a una altura h; y

2) que se mueve con una velocidad que sólo tiene componente horizontal y vale v_0.

Como no actúa ninguna fuerza sobre la pelota en dirección horizontal (si se ignora la resistencia del aire), entonces la componente horizontal de la velocidad de la pelota no cambia.

$$\textit{fuerza nula} \Rightarrow \textit{aceleración nula} \Rightarrow \textit{velocidad constante} \quad (417)$$

El espacio que recorre la pelota es:

$$x = v_0 t \quad (418)$$

El peso actúa verticalmente sobre la pelota y hacia abajo, e incrementa de manera constante la componente vertical de la velocidad de la pelota.

¿Qué trayectoria seguirá la pelota antes de tocar el suelo? Podemos aprovechar el resultado que conocemos de caída libre para decir que el tiempo de caída será, según la ecuación (42):

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (419)$$

y la posición de la pelota en cada instante es, según la ecuación (143) del apartado 2:

$$y = h - \tfrac{1}{2} g t^2 \quad (420)$$

Durante el tiempo t_c la pelota recorrerá una distancia horizontal igual a:

$$d_H = v_0\, t_c = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (421)$$

La pelota caerá en un punto situado a una distancia d_{H} del punto A, la proyección sobre el suelo del punto de partida.

Si eliminamos el tiempo y sustituimos la ecuación (418) en la (420), obtenemos la ecuación de una parábola:

$$y = h - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 \quad (422)$$

Es por esta razón que hablamos de **movimiento parabólico**. La trayectoria de la pelota en caída libre es parabólica, y no vertical, porque tiene una componente horizontal de la velocidad inicial.

Para los valores numéricos del enunciado, m = 100, g = 0,1 kg, v_0 = 10 m/s y h = 1 m, obtenemos, a partir de la ecuación (421):

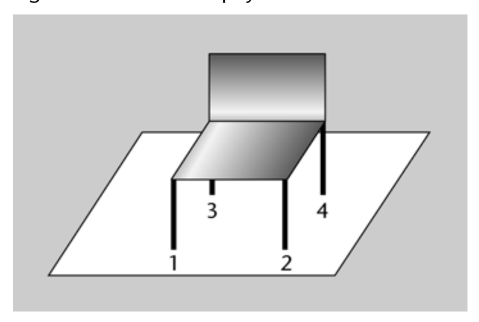
$$d_H = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{\frac{2\times 1\ \text{m}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{20}\,\text{m} \simeq 4{,}5\ \text{m}$$

La pelota cae a más de 4 m de su posición x inicial.

Solución del problema 4.7

La figura 125 muestra la silla.

Figura 125. Una silla apoyada en el suelo



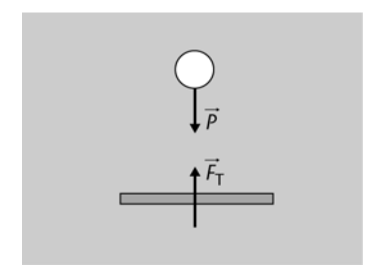
El ejemplo de esta situación física nos sirve para hablar de los diferentes niveles de descripción que pueden hacerse.

En un primer nivel de descripción se puede decir que si $\vec{P} = m\vec{g}$ es la fuerza que la Tierra ejerce sobre la silla (su peso), entonces el suelo ejerce sobre la silla que se apoya en él una fuerza igual y opuesta:

$$\vec{F}_{Tierra} = -\vec{P} \qquad (423)$$

La fuerza total sobre la silla es nula, $\vec{F}_{Tierra} + \vec{P} = 0$, y ésta está en equilibrio. Esquemáticamente, tenemos la situación de la figura 126.

Figura 126. Equilibrio de fuerzas en una silla: peso y fuerza de reacción del suelo



En otro nivel de descripción podemos decir que cada una de las patas está en contacto con el suelo; por lo tanto, por ejemplo, la pata 1 de la silla ejerce una fuerza $\vec{F}_1$ sobre el suelo, que es igual y opuesta a la fuerza que ejerce el suelo que soporta la silla, $\vec{R}_1$: $\vec{R}_1 = -\vec{F}_1$ es la reacción del suelo a $\vec{F}_1$. Lo mismo podríamos decir de los pares de fuerzas sobre cada pata:

$$\vec{F}_2 = -\vec{R}_2 \tag{424}$$

$$\vec{F}_3 = -\vec{R}_3 \tag{425}$$

$$\vec{F}_4 = -\vec{R}_4 \tag{426}$$

Por simetría, cabría esperar que $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, y que $\vec{F}_3 = \vec{F}_4$, pero este hecho no tiene importancia para el tema que nos ocupa.

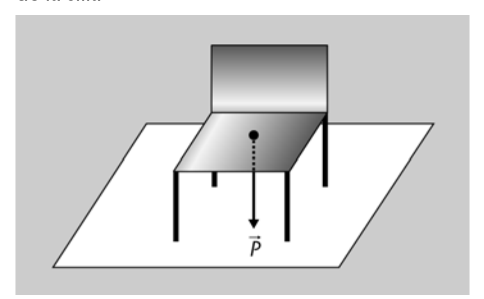
El peso de la silla se ha repartido entre las cuatro patas $\left(\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4\right)$.

La silla está en equilibrio porque la fuerza que la Tierra ejerce sobre ella (el peso) se compensa por la reacción del suelo sobre cada una de sus patas:

$$\vec{P} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{R}_4 \tag{427}$$

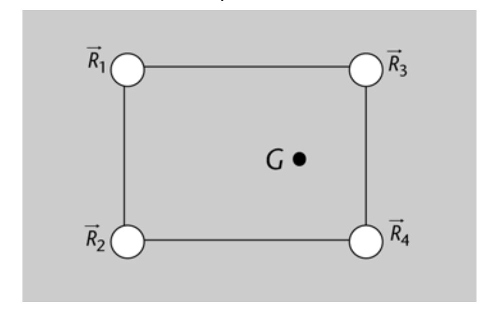
La fuerza que ejerce la Tierra actúa sobre el centro de gravedad de la silla (figura 127).

Figura 127. El peso (fuerza de atracción de la Tierra) actúa sobre el centro de gravedad de la silla



La figura 128 muestra esquemáticamente la proyección del centro de gravedad sobre el suelo y los puntos donde actúan las reacciones del suelo.

Figura 128. Posición del centro de gravedad de la silla y puntos en los cuales actúa la reacción del suelo sobre cada pata



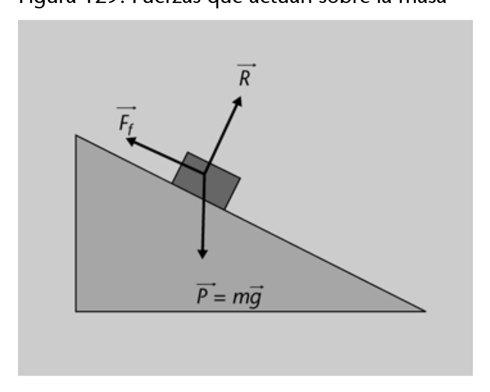
Solución del problema 4.8

a) El objeto está sometido a la atracción de la Tierra (el peso):

$$\vec{P} = m\vec{g} \tag{428}$$

El plano ejerce una reacción sobre la masa, cuya dirección es normal (perpendicular) al plano, $\vec{R}$, y también ejerce una fuerza de fricción que se opone al posible movimento, $\vec{F}_f$. Como el cuerpo tiene tendencia a caer, la fricción tiene el sentido contrario, hacia arriba (figura 129).

Figura 129. Fuerzas que actúan sobre la masa

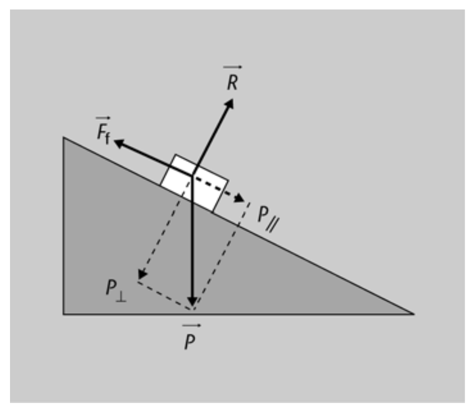


Si el cuerpo está en equilibrio, la suma de las tres fuerzas debe anularse:

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_f = 0 \tag{429}$$

Otra manera de analizar el problema es descomponiendo el peso en las dos componentes, paralela y perpendicular al plano inclinado, como muestra la figura 130.

Figura 130. Fuerzas que actúan sobre la masa



Si la masa está en equilibrio, debe cumplirse que:

$$P_\perp = R \tag{430}$$

$$P_{//} = F_f \tag{431}$$

b) La fuerza que acelera la masa que cae por el plano inclinado es la resultante de las fuerzas paralelas al plano. Por la segunda ley de Newton, la aceleración de caída será:

$$P_{//} - F_f = ma \qquad (432)$$

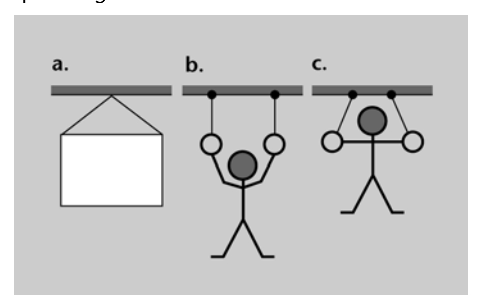
Si no existe fricción, la aceleración con la que cae la caja es:

$$a = \frac{P_{//}}{m} = \frac{mg \text{ sen } \alpha}{m} = g \text{ sen } \alpha$$

En caída libre, a = 90°, el plano no juega ningún papel, y $a = g$.

Solución del problema 4.9

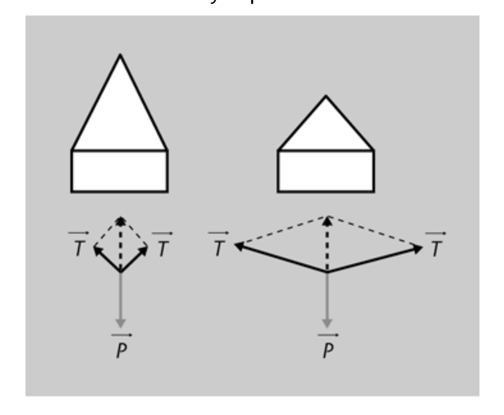
Figura 131. Un cuadro colgado y una pesona que cuelga de unas anillas



La postura **c** es más difícil para el gimnasta que la **b** porque debe aplicar más fuerza para mantenerse en equilibrio. Para ver cuál es la razón, podemos empezar por el cuadro que está colgado de dos hilos. Si los hilos de los que cuelga el cuadro son más largos (figura 132), la tensión a la que están sometidos es menor.

Para verlo, podemos hacer un esquema en el que la suma de las dos tensiones, aplicadas en la dirección de los hilos, compense el peso del cuadro. Ambos conjuntos de hilos de longitud (y, por lo tanto, ángulo entre ellos) diferente, obtenemos lo que muestra el esquema de la figura 132.

Figura 132. Un cuadro colgado de dos hilos, de longitudes diferentes, y equilibrio entre la tensión de los hilos y el peso del cuadro



Está claro que cuando el ángulo que forman los hilos del cuadro es mayor, las fuerzas de tensión de los hilos deben ser también mayores.

El mismo tipo de razonamiento permite concluir que los brazos del gimnasta soportarán una tensión mayor en el caso **c** que en el **b**.

Solución del problema 5.1

El teorema de conservación de la enegía nos dice que no, que cuando lanzamos una pelota verticalmente, la velocidad con la que regresa a nuestra mano es la misma, en módulo, que la velocidad con la que la lanzamos. Vamos a verlo.

Suponed que lanzamos la pelota con una velocidad inicial $\vec{v}_i$ y desde una altura que tomamos como origen de alturas y, por lo tanto, como origen de energías potenciales gravitatorias.

Aplicamos el teorema de conservación de la energía (ecuación 314) al punto de salida o "inicial" ($h_{\mathrm{i}} = 0$, $\vec{v}_i \neq 0$) y al punto más alto de la trayectoria o "final", en la que la pelota está a una altura Δh y se detiene instantáneamente antes de empezar a caer ($h_f = \Delta h$, $\vec{v}_f = 0$). Si lo hacemos, obtenemos:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mg\,\Delta h \qquad (433)$$

El resultado anterior es la expresión matemática del fenómeno físico que observamos y que describimos en términos energéticos: la energía cinética inicial de la pelota se ha transformado en energía potencial, que es máxima en el punto más alto de la trayectoria.

Esta energía potencial se convierte en la energía cinética que tiene la pelota al regresar a nuestras manos (donde la energía potencial es nula porque hemos tomado el origen de energías potenciales). El teorema de conservación de la energía afirma que llegará a nuestras manos con una velocidad $\vec{v}$ que cumple:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (434)$$

Por lo tanto, si comparamos la ecuación (433) con la (434), vemos que la velocidad con la que llega es $v^2 = v_i^2$, la misma con la que salió, pero en sentido contrario:

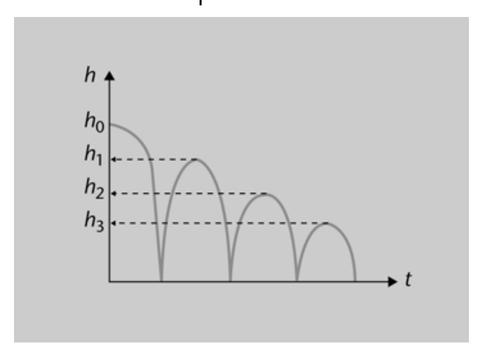
$$\vec{v} = -\vec{v}_i \qquad (435)$$

El proceso de lanzamiento ha resultado ser sólo un cambio de sentido de la velocidad inicial.

Solución del problema 5.2

La gráfica cualitativa muestra los rebotes de la pelota que cae desde una altura inicial h_0.

Figura 133. Altura de una pelota que rebota, en función del tiempo



El primer máximo de la figura 133 corresponde a una energía potencial gravitatoria (ecuación 277):

$$E_{p0} = mgh_0 \qquad (436)$$

que es la energía inicial total de la partícula que cae libremente.

Al llegar al suelo, toda la energía potencial de la pelota se ha convertido en energía cinética. De esta energía cinética, la partícula pierde un tanto por ciento *r* en el rebote.

Al rebotar hasta la nueva altura h_1, la pelota convierte en energía potencial la energía cinética que le queda después del impacto con el suelo.

El segundo pico correspondería a una energía potencial reducida en el tanto por ciento *r* correspondiente (por ejemplo, si $r = 10\%$, escribiremos $r = 10/100 = 0{,}1$ en la expresión siguiente):

$$E_{p1} = E_{p0}(1-r) = mgh_1 \qquad (437)$$

Podemos relacionar las alturas a las que llega la pelota en cada rebote. De la ecuación (437), cuando se sustituye la expresión de la ecuación (436), la relación entre la altura a la que llega después del primer rebote y la altura inicial es:

$$mgh_0(1-r) = mgh_1 \qquad (438)$$

es decir:

$$h_1 = h_0(1-r) \qquad (439)$$

De la misma manera, podemos encontrar la altura del tercer pico:

$$E_{p2} = E_{p1}(1-r) = mgh_2 \qquad (440)$$

Y análogamente para los picos restantes.

Respecto a la velocidad de la partícula, cuando llega al suelo en el primer rebote tiene una velocidad que resulta, por el principio de conservación de energía (ecuación 314), de igualar la energía potencial inicial con la energía cinética con la que llega al suelo:

$$mgh_0 = ½\, mv^2 \tag{441}$$

Cuando vuelve a caer al suelo, desde la altura h_1, la velocidad de la pelota en el momento que toca el suelo es, análogamente:

$$mgh_1 = ½\, mv'^2 \tag{442}$$

Podemos relacionar la velocidad antes del segundo rebote, v', con la velocidad antes del primer rebote, v; para hacerlo dividimos miembro a miembro las expresiones que tenemos en las ecuaciones (441) y (442):

Observación

Observad que la bola sólo pierde energía en el choque: la velocidad con la que sale de un choque es la misma que la velocidad con la que efectúa el choque siguiente.

$$\frac{v^2}{v'^2} = \frac{h_0}{h_1} \tag{443}$$

y, si tenemos en cuenta el resultado de la ecuación (439), podemos escribir que:

$$\frac{v^2}{v'^2} = \frac{1}{1-r} \tag{444}$$

Finalmente, la velocidad de la partícula se reduce a:

$$v' = \sqrt{1-r}\, v \tag{445}$$

Para r = 10 %, por ejemplo, la energía se reduce en un 10% (1 – 0,9) en cada rebote, mientras que la velocidad se reduce en un 30 % ($= \sqrt{1-0,9}$).

Solución del problema 5.3

Aplicamos el principio de conservación de la energía al plano inclinado. Supongamos que el plano no tiene rozamiento (por lo tanto, sólo existen fuerzas conservativas) y que subimos el objeto por el plano sin acelerarlo. En este caso sólo podemos decir que el trabajo que hacemos es igual a la diferencia de energía potencial entre el punto más alto del plano y el punto más bajo del plano, ecuación 269.

$$W = \Delta E_p \tag{446}$$

La diferencia de energía potencial es:

$$\Delta E_p = mgh \tag{447}$$

si tomamos el origen de energías potenciales en el punto bajo del plano. Pero este es el mismo trabajo que hacemos si subimos la masa verticalmente a la misma altura que tenga el plano: ejercemos una fuerza constante, igual al peso, a lo largo de una distancia *h*: $W = F \cdot h = mgh$.

Solución del problema 5.4

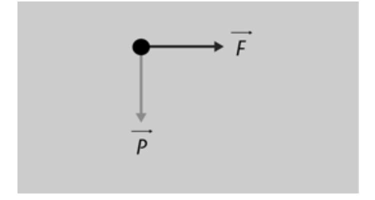
a) Ningún trabajo. Si una fuerza no desplaza el punto de aplicación, no hace ningún trabajo. Lo podéis ver en la expresión que define el trabajo que hace una fuerza, la ecuación 236:

$$dW = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cdot \cos \vartheta \qquad (448)$$

si el desplazamiento ($\left|d\vec{r}\right|$) es nulo, el trabajo es nulo.

b) Ningún trabajo. Como la fuerza que aplicamos (vertical, al sostener el libro) es perpendicular al desplazamiento (horizontal), el trabajo es nulo. Estamos en la situación de la figura 134, que matemáticamente da la ecuación 448 para un ángulo de 90°.

Figura 134. En un desplazamiento horizontal la fuerza $\vec{F}$ no hace trabajo



c) No hacemos ningún trabajo.

Al levantar el libro hacemos un trabajo positivo porque la fuerza aplicada (igual al peso) y el desplazamiento son paralelos y en el sentido hacia arriba (el ángulo que forman fuerza y desplazamiento es de 0 radianes).

Al bajar el libro, el trabajo que hacemos es negativo y de valor idéntico al primero, porque la fuerza aplicada es vertical y hacia arriba (igual al peso), pero el desplazamiento es en sentido descendente (el ángulo que hacen fuerza y desplazamiento es de π radianes).

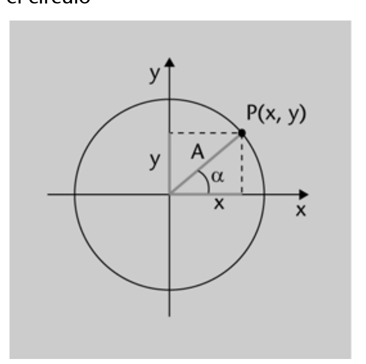
El trabajo total que hemos hecho sobre el libro es nulo.

Lo mismo podríamos decir del trabajo de las fuerzas del campo, que es nulo en el recorrido cerrado que ha descrito el libro, al volver al punto de partida.

Solución del problema 6.1

La situación que describe el enunciado puede representarse de la manera que muestra la figura 135.

Figura 135. Círculo de radio *A* y posición de un punto sobre el círculo



Las coordenadas del punto que gira sobre el círculo son:

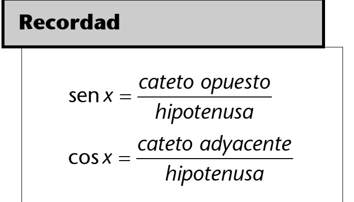
$$x = A\cos\alpha \tag{449}$$

$$y = A \text{ sen } \alpha \tag{450}$$

Si la velocidad ω es constante, el ángulo que recorre la partícula en un tiempo *t* (la velocidad angular es una velocidad y, por lo tanto, aquí la velocidad angular juega el papel de la velocidad en el apartado 2, y el ángulo el papel de la posición):

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \tag{451}$$

Recordad



donde α_0 es el ángulo que define la posición de la partícula en el instante inicial:

$$\alpha(t = 0) = \alpha_0 \tag{452}$$

Por lo tanto:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_0) \tag{453}$$

Esta es la ecuación del MAS que hemos estudiado en el apartado 6.1.

También es armónico simple el movimiento de la proyección de la posición de la partícula sobre el eje *Y*: sólo debemos repetir los pasos anteriores para la función $y = A$ sen α.

Solución del problema 6.2

No existe ninguna contradición.

Lo que se afirma con la ecuación (380) es que *si* ω *y A son constantes*, $E \propto m$.

Pero con la sustitución de ω se llega a la expresión:

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 = \frac{1}{2} kA^2 \qquad (454)$$

que indica que *para un muelle dado* (y, por lo tanto, para una constante elástica k dada), la energía total del oscilador es independiente de la masa y depende cuadráticamente de la amplitud de la oscilación.

Como vimos en el subapartado 1.6.3, puede hablarse de la proporcionalidad entre dos magnitudes cuando las otras dependencias funcionales que puedan intervenir se mantienen constantes.

Solución del problema 6.3

Supongamos que una sola medida del periodo da un tiempo t_1 y que la medida tiene un error ε. Este error depende del instrumento con el que medimos el tiempo y de otros factores, como que nunca vamos a cometer el mismo error al activar y desactivar el cronómetro.

Recordad

La letra grega ε se lee "épsilon".

Diremos que el periodo vale:

$$T = t_1 \pm \varepsilon \qquad (455)$$

es decir, que el periodo medido se halla entre los valores $t_1 - \varepsilon$ y $t_1 + \varepsilon$. Por ejemplo, podríamos haber obtenido un periodo de 1,2 s con un error de 0,3 s; entonces el periodo estaría comprendido entre 0,9 s y 1,5 s.

Pero si medimos 10 oscilaciones y obtenemos el valor t_{10} con un error ε', el periodo es:

$$T = \frac{t_{10} \pm \varepsilon'}{10} = \frac{t_{10}}{10} \pm \frac{\varepsilon'}{10} \qquad (456)$$

El error que cometemos al medir 10 oscilaciones no será muy diferente del error que cometemos al medir una sola. Por lo tanto, el error con el que podemos dar el periodo es ahora mucho menor.

Solución del problema 6.4

Por el principio de conservación de la energía, en todo momento la energía total del péndulo permanece constante, siempre que no haya fricción por el aire ni en el punto de soporte del hilo en el techo.

Si separamos el péndulo de la vertical y lo soltamos, la energía inicial es puramente potencial, ya que la energía cinética inicial es nula.

La energía potencial del péndulo cuando lo separamos de la vertical, y que es la energía total del péndulo, se convierte parcialmente en energía cinética,

mientras el péndulo vuelve a su posición inicial, vertical. En este punto, toda la energía es cinética, y la potencial es nula.

Al pasar el péndulo por la posición vertical inicial, continúa su movimiento y ahora es la energía cinética la que se convertirá en potencial hasta que, en el otro extremos de la oscilación, únicamente tenemos energía potencial.

Análogamente podríamos explicar las oscilaciones de una masa unida a un muelle elástico.

En el punto más bajo de la trayectoria, el péndulo sólo tiene energía cinética, y en el extremo de su oscilación, sólo tiene energía potencial.

Solución del problema 6.5

Sabemos que la relación entre el alargamiento de un muelle y la energía que almacena es, según la ecuación (378) del apartado 6:

$$E_p = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \tag{457}$$

‘Podemos hallar la constante elástica de manera aproximada si en la ecuación anterior sustituimos las coordenadas de un punto de la figura del enunciado (figura 122).

Por ejemplo, para Δl = 10 cm,vemos en la figura que $E_p \approx$ 0,6 J, es decir:

$$k = \frac{2E_p}{\Delta l^2} = \frac{2 \times 0,6 \text{ J}}{(0,01 \text{ m})^2} = 120 \text{ J/m}^2 \tag{458}$$

Para obtener el valor de k de una manera más precisa, deberíamos utilizar algún método como el del ajuste por mínimos cuadrados.

Resumen

En este módulo hemos estudiado las dos partes de la mecánica: la cinemática y la dinámica.

Los conceptos y leyes que hemos estudiado en mecánica son los fundamentos para toda la física. En particular, las tres leyes de Newton permiten resolver muchos problemas de dinámica. Conceptos como velocidad, aceleración, energía, energía cinética, energía potencial, momento lineal, movimiento armónico simple, frecuencia angular, etc., y las leyes de conservación del momento lineal y de la energía, son de utilidad en toda la física y, en general, en todas las ciencias y las ingenierías.

En situaciones especiales, como cuando estudiamos el movimiento de partículas que se mueven a velocidades comparables a la de la luz, o cuando analizamos fenómenos que ocurren a escalas atómica y subatómica, la mecánica newtoniana ha dado paso a la mecánica relativista, a la teoría de la relatividad general o a la mecánica cuántica.

Pero con los conceptos que hemos estudiado en estos seis temas, podemos abordar multitud de problemas de la vida cotidiana y también problemas de interés en ingeniería. Por otra parte, los conceptos que hemos introducido y, sobre todo, la manera como hemos llegado a ellos, nos ha mostrado un modo de aprender a definir magnitudes y a enfrentarnos a situaciones problemáticas que nos pueden servir en otras materias de estudio o de trabajo.

Una vez introducidos los conceptos básicos de la mecánica del movimiento translacional, rotacional y vibracional, podemos tener presente globalmente esta parte de la física a partir de las relaciones más importantes que hemos estudiado. Una ventaja del lenguaje algebraico o matemático es que condensa en unos cuantos símbolos las definiciones o las relaciones entre conceptos y magnitudes de interés para el análisis de los movimientos y de sus causas. Pero, como hemos visto en el apartado 1, el lenguaje verbal en el que se enuncian las relaciones entre las magnitudes, y la descripción gráfica que acompaña su uso, son tan importantes como las fórmulas.

La tabla siguiente muestra algunas de las relaciones más importantes que hemos estudiado en este módulo. Las relaciones se presentan en el orden en el que han ido apareciendo en los apartados anteriores.

Relaciones básicas de la mecánica	
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Velocidad
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Aceleración
$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	Tiempo de caída en caída libre
$a_c = \frac{v^2}{r}$	Módulo de la aceleración centrípeta
$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V}$	Velocidades de una partícula medidas por dos sistemas de referencia inerciales que tienen una velocidad relativa $\vec{V}$
$\vec{a} = \vec{a}\,'$	Aceleraciones de una partícula medidas por dos sistemas de referencia inerciales
$\vec{F} = m\vec{a}$	Segunda ley de Newton
$\vec{F} = -\vec{R}$	Fuerzas de acción y reacción (que, recordad, están aplicadas en cuerpos diferentes)
$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$	Principio de superposición para las aceleraciones, fuerzas, etc.
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Momento lineal
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = constante$	Ley de conservación del momento lineal para un sistema aislado
$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Trabajo
$P = \frac{dW}{dt}$	Potencia
$E_c = \frac{m\vec{v}^2}{2}$	Energía cinética
$\Delta E_c = W_{fuerzas}$	Fuerzas conservativas y no conservativas
$\Delta E_{p\ a \to b} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{campo} \cdot d\vec{r}$	Energía potencial en un campo de fuerzas conservativas
$\Delta E_p = -W_{fuerzas\ conservativas}$	Fuerzas conservativas
$E_M = E_c + E_p$	Energía mecánica
$E_M = constante$	Fuerzas conservativas
$\Delta E_M = W_{fuerzas\ no\ conservativas}$	Fuerzas conservativas y no conservativas
$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$	Elongación en un MAS
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Frecuencia angular propia de un muelle elástico
$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	Periodo de oscilación de un péndulo simple que hace pequeñas oscilaciones
$a = -\omega^2 x$	Aceleración en el MAS
$\mathrm{F} = -kx$	Fuerza restauradora en un muelle elástico
$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	Energía potencial en un MAS
$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$	Energía total en un MAS
$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$	Ecuación diferencial de movimento de un MAS

Ejercicios de autoevaluación

1. Cuando un objeto se mueve a una velocidad constante de 50 km/h...
a) ... no está acelerado.
b) ... puede estar acelerado.
c) ... seguro que está acelerado.
d) ... no puede haber una fuerza que actúe sobre el cuerpo.

2. Caen una manzana pequeña y una manzana grande de un árbol. El tiempo que tardan en llegar al suelo...
a) ... es el mismo.
b) ... es mayor para la manzana grande.
c) ... es mayor para la manzana pequeña.
d) Todas las respuestas anteriores son correctas.

3. La masa de un cuerpo es...
a) ... el peso de un cuerpo.
b) ... una medida de la inercia del cuerpo.
c) ... diferente en la Luna que en la Tierra.
d) Todas las respuestas anteriores son correctas.

4. Un caballo ejerce una fuerza de 1 kN sobre un carro. El carro ejerce una fuerza sobre el caballo que...
a) ... depende de la aceleración del carro.
b) ... es menor de 1 kN para que el caballo pueda moverlo.
c) ... es mayor de 1 kN para que el caballo no pueda moverlo.
d) ... vale 1 kN.

5. Cuando un caballo arrastra un carro, la fuerza que hace que el caballo avance es...
a) ... la fuerza que ejerce el carro sobre el caballo.
b) ... la fuerza que ejerce el caballo sobre el carro.
c) ... la fuerza que ejerce el caballo sobre el suelo con las patas.
d) ... la fuerza que ejerce el suelo sobre las patas del caballo.

6. Cuando se aplica una fuerza constante sobre un cuerpo que se mueve, ésta hace que tenga...
a) ... un movimiento acelerado.
b) ... un movimiento centrípeto.
c) ... un movimiento uniforme.
d) ... una velocidad constante.

7. Las fuerzas de acción y reacción de la tercera ley de Newton...
a) ... siempre actúan sobre cuerpos diferentes.
b) ... a veces pueden actuar sobre cuerpos diferentes.
c) ... actúan sobre el mismo cuerpo.
d) ... actúan en la misma dirección pero no son necesariamente de la misma intensidad.
e) ... son siempre de la misma intensidad pero pueden actuar en direcciones diferentes.

8. Un cohete espacial se acelera porque...
a) ... los gases que expulsa lo empujan contra la Tierra.
b) ... los gases empujan el cohete.
c) ... la Tierra empuja el cohete.
d) ... el cohete ejerce una fuerza sobre él mismo.

9. Cuando vais en un vehículo que toma una curva bruscamente, os veis empujados hacia un lado porque...
a) ... tendéis a moveros en línea recta.
b) ... actúa una fuerza contrífuga sobre vosotros.
c) ... el coche ejerce una fuerza sobre vosotros y hacia el exterior de la curva.
d) ... actúa la gravedad.

10. Cuando se chuta un balón de fútbol que está en reposo sobre el césped, la componente vertical de la velocidad es mayor...
a) ... justo después de abandonar el pie que lo chuta.
b) ... en el punto más alto de la trayectoria.
c) ... justo antes de tocar el suelo.
d) Las dos respuestas a y c son correctas.

11. ¿Cómo afecta la gravedad terrestre a la bala de un rifle que se dispara horizontalmente?
a) La bala empieza a caer cuando ha perdido la mayor parte de la velocidad que lleva.
b) La velocidad de caída dependerá de su velocidad inicial horizontal.

c) La bala caerá exactamente igual que si no tuviese velocidad horizontal.
d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

12. Cuando observamos un objeto que se mueve en un círculo, ¿qué podemos inferir?
a) Que existe una fuerza centrífuga que actúa sobre el objeto.
b) Que existe una fuerza que empuja el objeto a lo largo del círculo.
c) Que sobre el cuerpo actúa una fuerza dirigida hacia el centro del círculo.
d) Que no actúa ninguna fuerza sobre el objeto.

13. La Luna se mantienen en órbita alrededor de la Tierra a causa de...
a) ... la gravedad terrestre.
b) ... la fuerza centrífuga.
c) ... las mareas.
d) ... el Sol.

14. ¿De qué dos factores depende el trabajo?
a) Fuerza y energía.
b) Fuerza y distancia.
c) Distancia y energía.
d) Energía y momento lineal.

15. ¿Qué diferencia existe entre el trabajo que se hace cuando se mueve un libro de 10 kg a velocidad constante en una trayectoria recta horizontal de 100 m, y el que se hace cuando se levanta a una altura de 2 m un libro de ½ kg?
a) Se hace más trabajo en el primer caso.
b) Se hace más trabajo en el segundo caso.
c) Se hace el mismo trabajo en ambos casos.
d) No se hace trabajo en ningún caso.

16. Si la masa de un objeto en movimiento se duplica sin cambiarle la velocidad, la energía cinética...
a) ... se reduce a 1/4.
b) ... no varía.
c) ... se duplica.
d) ... se cuadruplica.

17. Si la velocidad de un pájaro se duplica, su energía cinética...
a) ... se reduce a la mitad.
b) ... no varía.
c) ... se duplica.
d) ... se cuadruplica.
e) ... aumenta en la misma cantidad en la que se reduce su energía potencial.

18. La energía potencial es...
a) ... energía debida al movimiento.
b) ... energía que depende de la posición del cuerpo.
c) ... energía que depende de las propiedades del cuerpo.
d) ... siempre constante.
e) Las respuestas b y c son correctas.

19. Un libro de 2 kg que está sobre una estantería de 2 m de altura tiene (...) energía potencial que dos libros de 1 kg que están a 1 m de altura.
a) la misma
b) el doble de
c) la mitad de
d) No se pueden comparar, porque el origen de energías potenciales es diferentes en los dos casos.

20. La energía es...
a) ... una magnitud asociada sólo al movimiento de los objetos.
b) ... una forma de momento lineal.
c) ... una magnitud que se conserva siempre.
d) ... una propiedad que no puede convertirse de una forma en otra.

21. Dejamos caer una pelota desde una altura de 3 m. Rebotará hasta una altura...
a) ... de menos de 3 m.
b) ... de 3 m.
c) ... de más de 3 m.
d) ... que depende de cómo sea la pelota.

22. El ritmo al que se transforma energía se denomina...
a) ... trabajo.
b) ... momento lineal.
c) ... potencia.
d) ... consumo energético.

23. ¿En qué caso se necesita más potencia?
a) Para bajar unas escaleras de 3 pisos en 14 s.
b) Para subir unas escaleras de 3 pisos en 12 s.
c) Para subir unas escaleras de 2 pisos en 6 s.
d) Para subir unas escaleras de 1 piso en 4 s.

24. El momento lineal es...
a) ... una magnitud escalar.
b) ... la capacidad de hacer trabajo.
c) ... la fuerza que ejerce un cuerpo sobre otro en una colisión.
d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

25. Un camión tiene más momento lineal que un coche que se mueve a la misma velocidad porque el camión...
a) ... tiene más masa.
b) ... no tiene perfil aerodinámico.
c) ... tiene las ruedas más grandes.
d) ... tiene una energía cinética menor.

26. El retroceso de un rifle cuando se dispara un tiro es un ejemplo de...
a) ... conservación del momento lineal.
b) ... conservación de la energía.
c) ... principio de inercia.
d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

27. Los sistemas de referencia ...
a) ... son necesarios para determinadas medidas de magnitudes.
b) ... se utilizan para hacer cualquier medida de magnitudes.
c) ... se utilizan principalmente para sumar velocidades.
d) ... se utilizan principalmente para sumar aceleraciones y fuerzas.

28. Un rifle es capaz de disparar una bala a una velocidad de 600 km/h. El rifle está sobre un tren que va a 60 km/h y dispara en la dirección de la marcha del tren. La velocidad de la bala, vista por un observador que ve pasar el tren desde la estación es...
a) ... 600 km/h.
b) ... 60 km/h.
c) ... 660 km/h.
d) ... 540 km/h.

29. En un movimiento armónico simple (MAS), el periodo es...
a) ... proporcional al cuadrado de la amplitud.
b) ... proporcional a la amplitud.
c) ... independiente de la amplitud.
d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

30. En el movimiento armónico simple, la energía total...
a) ... es proporcional a la amplitud.
b) ... es proporcional al cuadrado de la amplitud.
c) ... es independiente de la amplitud.
d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

31. Si la aceleración de una partícula es proporcional a su desplazamiento y tiene (...) el movimiento es armónico simple.
a) ... el mismo sentido ...
b) ... sentido opuesto ...
c) Cualquiera de las dos respuestas es válida.
d) Todas las respuestas anteriores son falsas.

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. a; **2.** a; **3.** b; **4.** d; **5.** d; **6.** a; **7.** a; **8.** b; **9.** a; **10.** d; **11.** c; **12.** c; **13.** a; **14.** b; **15.** b; **16.** d; **17.** d; **18.** b; **19.** b; **20.** c; **21.** a; **22.** c; **23.** c; **24.** d; **25.** a; **26.** a; **27.** b; **28.** c; **29.** c; **30.** b; **31.** b.

Glosario

aceleración *f* Ritmo al que cambia la velocidad de un objeto con el tiempo. El cambio de velocidad puede ser en magnitud, dirección o sentido.

aceleración de la gravedad *f* Aceleración de un objeto que cae libremente. Cerca de la superficie de la Tierra, g = 9,81 m/s^2.
sbl g

aceleració instantánea *f* Valor de la aceleración en un momento determinado.

acción y reacción *f* Par de fuerzas que se ejercen dos objetos entre sí según la tercera ley de Newton.

amplitud *f* Desplazamiento máximo a ambos lados de la posición de equilibrio (posición central) en una onda o vibración.

caída libre *f* Movimiento que ocurre únicamente bajo la influencia de la gravedad.

campo de fuerzas *m* Perturbación del espacio que rodea una masa, una carga eléctrica o un imán, de manera que otra masa, carga eléctrica o imán que se introduzca en él experimentará una fuerza.

campo gravitatorio *m* Campo de fuerzas que existe en el espacio alrededor de cualquier masa o grupo de masas.

choque elástico *m* Véase **colisión elástica**.

choque no elástico *m* Véase **colisión no elástica**.

colisión elástica *f* Colisión en la que los objetos que chocan, rebotan sin producir deformaciones ni generar calor. Más concretamente, colisión en la que la energía cinética total del sistema es la misma antes y después de la colisión.
sin. **choque elástico**

colisió no elástica *f* Colisión en la que los objetos que chocan quedan distorsionados o se general calor. Más concretamente, colisión en la que la energía cinética total del sistema no es la misma antes y después de la colisión.
sin. **choque no elástico**

componente *m* o *f* Cada una de las proyecciones en las que puede descomponerse un vector y que actúa en una dirección diferente del espacio.

conservación de la energía mecánica *f* Principio que afirma que la energía mecánica no puede crearse ni destruirse. Puede transformarse de una forma de energía (potencia, cinética) en otra, pero la energía total no cambia.

conservación del momento lineal *f* Principio que afirma que, en ausencia de una fuerza neta externa, el momento lineal de un objeto o de un sistema no cambia.

distancia recorrida *f* Longitud de la trayectoria por la que se mueve un objeto.

ecuaciones de movimiento *f pl* Dependencia temporal de las coordenadas del vector de posición (o de la velocidad, o de la aceleración) de un objeto que se mueve.

elasticidad *f* Propiedad de un sólido que hace que experimente un cambio de forma cuando actúa sobre él una fuerza deformadora y que vuelve a la forma original cuando se elimina la fuerza deformadora.

energía *f* Capacidad de hacer trabajo.

energía cinética *f* Energía debida al movimiento, igual a la mitad de la masa multiplicada por el cuadrado de la velocidad, $E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$.

energía mecánica *f* Energía debida a la posición o al movimiento de un objeto, igual a la suma de la energía cinética y la potencial.

energía potencial *f* Energía debida a la posición de un cuerpo en el seno de un campo de fuerzas.

energía potencial gravitatoria *f* Energía potencial que tiene un cuerpo por la posición que ocupa en el seno de un campo gravitatorio. En el caso de calcularse cerca de la superficie de la Tierra es $E_p = mgh$.

equilibrio mecánico *m* Estado de un objeto o de un sistema en el que las fuerzas aplicadas se anulan entre sí y no existe aceleración. (El estado más general de equilibrio requiere también la ausencia de rotaciones.)

escalar *adj* Dicho de una magnitud física, como la masa, el volumen o el tiempo, que queda totalmente especificada por un número.

frecuencia *f* Número de vibraciones por unidad de tiempo de un cuerpo o medio que vibra. Se mide en hercios (Hz).

frecuencia natural *f* Frecuencia a la que un sistema oscilante tiende a vibrar si está perturbado o si la fuerza perturbadora deja de aplicársele.

fricción *f* Fuerza que actúa para resistir contra el movimiento relativo (o el intento de movimiento) de un objeto sobre otro con el que está en contacto.

fricción estática *f* Fuerza entre dos objetos que están en reposo relativo, debida a las fuerzas de contacto que tienden a oponerse al deslizamiento del uno con respecto al otro.

fuerza *f* Cualquier acción que tiende a acelerar un objeto, como un empuje o un estiramiento. Se mide en newton y es una magnitud vectorial.

fuerza centrípeta *f* Fuerza dirigida hacia el centro de una trayectoria curvada o circular y que hace que la partícula siga la curva.

fuerza de acción *f* Fuerza del par de fuerzas de acción-reacción que describe la tercera ley de Newton.

fuerza de reacción *f* Fuerza del par de fuerzas de acción-reacción que describe la tercera ley de Newton, igual en intensidad y de dirección opuesta a la fuerza de acción.

fuerza neta *f* Fuerza resultante de la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un objeto.

fuerza normal *f* Fuerza que ejerce la superficie sobre la que se apoya un objeto, que equilibra la componente del peso en la dirección de la normal.

g *m* Símbolo de **gramo**.

g *m* Símbolo de la **aceleración de la gravedad**.

gramo *m* Milésima parte de un kilogramo.
sbl **g**

gravitación *f* Atracción entre objetos a causa de su masa.

hercio *m* Unidad de frecuencia del Sistema Internacional, equivalente a una vibración por segundo.
sbl **Hz**

Hz *m* Símbolo de **hercio**.

inercia *f* Resistencia que presenta un objeto a cambiar el estado de movimiento. La masa es una medida de la inercia.

ingravidez *f* Condición de caída libre hacia la Tierra o alrededor de la Tierra, en la que un objeto no experimenta ninguna fuerza de apoyo (y no ejerce ninguna fuerza sobre una báscula).

interacción *f* Acción mutua entre objetos en los que cada objeto ejerce una fuerza sobre el otro y ambas fuerzas son iguales y opuestas.

intervalo de tiempo *m* Tiempo que transcurre entre dos instantes dados.

inversamente proporcional *loc* Dicho de dos magnitudes que cambian en sentido opuesto: cuando una aumenta la otra disminuye.

J *m* Símbolo de **julio.**

julio *m* Unidad de trabajo y de energía del Sistema Internacional, equivalente al trabajo que hace una fuerza de un newton que se ejerce sobre un objeto que se mueve un metro en la dirección de la fuerza.
sbl **J**

k *f* Constante de un muelle que obedece la ley de Hooke, $F = -kx$.

k *m* Símbolo de **kilo-**.

kg *m* Símbolo de **kilogramo**.

kilo- Prefijo del Sistema Internacional para indicar *mil*, como en kilogramo, kilovatio, etc.

kilogramo *m* Unidad fundamental de masa del Sistema Internacional, igual a la masa de un prototipo internacional fabricado en platino y que se conserva en la Oficina de Pesos y Medidas de Sèvres (Francia).
sbl **kg**

kilómetro *m* Mil metros.
sbl **km**

kilovatio *m* Mil vatios.
sbl **kW**

km *m* Símbolo de **kilómetro**.

kW *m* Símbolo de **kilovatio**.

ley de acción y reacción *f* Véase **tercera ley de Newton**.

ley de inercia *f* Véase **primera ley de Newton**.

leyes de Newton del movimento *f pl* Conjunto de leyes básicas de la mecánica, formadas por la primera, la segunda y la tercera leyes de Newton.

m *m* Símbolo de **metro**.

m *m* Símbolo de **mili-**.

m *f* Símbolo de **masa**.

M *m* Símbolo de **mega-**.

magnitud *f* Propiedad de un cuerpo o de un sistema que puede medirse.

magnitud fundamental *f* Magnitud que se toma como base para definir todas las magnitudes de una disciplina. En el caso de la mecánica son necesarias tres magnitudes fundamentales: la masa, la longitud y el tiempo. Para toda la física se toman siete magnitudes fundamentales.

MAS *m* Véase **movimiento armónico simple**.

masa *f* Magnitud escalar positiva asociada a todo objeto y que mide su inercia, igual al cociente entre la fuerza que actúa sobre el objeto y la aceleración que le comunica.
sbl ***m***

mega- *m* Prefijo del Sistema Internacional para indicar *un millón*.
sbl **M**

megajulio *m* Un millón de julios.
sbl **MJ**

metro *m* Unidad fundamental de longitud del Sistema Internacional.
sbl **m**

min *m* Símbolo de **minuto**.

minuto *m* Intervalo de tiempo igual a la sexagésima parte de una hora.
sbl **min**

MJ *m* Símbolo de **megajulio**.

modelo *m* Representación de un proceso o de una idea para hacerla más comprensible.

momento lineal *m* Producto de la masa de un objeto por su velocidad, $\vec{p} = m\vec{v}$.

movimiento en *n* dimensiones *m* Movimiento que puede describirse con *n* coordenadas.

movimiento armónico simple *m* Movimiento vibratorio o periódico, como el de un péndulo, en el que la fuerza que actúa sobre el cuerpo que vibra es proporcional al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio central y actúa hacia esta posición.
sigla **MAS**

movimiento lineal *m* Movimiento a lo largo de una trayectoria rectilínea.

movimiento no lineal *m* Movimiento a lo largo de una trayectoria no rectilínea.

movimiento oscilatorio *m* Movimiento cíclico a un lado y a otro de la posición de equilibrio, como el de un péndulo.

movimiento rotacional *m* Movimiento de giro alrededor de un eje o de un punto.

movimiento translacional *m* Movimiento de un objeto entre dos puntos, en una trayectoria que no es circular.

movimiento vibracional *m* Movimiento de un objeto hacia adelante y hacia atrás alrededor de un punto de equilibrio, en el que el objeto no se desplaza.

N *m* Símbolo de **newton**.

newton *m* Unidad de fuerza del Sistema Internacional, equivalente a la fuerza que, aplicada a un kilogramo de masa, produce una aceleración de un metro por segundo cada segundo, $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2$.
sbl **N**

no elástico-a *adj* Cualidad de un material que no recupera la forma original después de haberlo estirado o comprimido.

normal *adj* En dirección perpendicular. La fuerza normal actúa en dirección perpendicular a la superficie sobre la que se apoya un objeto.

oscilación *f* Movimiento repetitivo (periódico) a un lado y a otro de la posición de equilibrio de un sistema.
sin. **vibración**

orden de magnitud *m* Exponente en la potencia de 10 que da un valor múltiple de 10 más próximo al valor de la magnitud (por ejemplo, 892 es del orden de magnitud de 10^3).

parábola *f* Trayectoria que sigue un objeto sobre el que sólo actúa la fuerza de la gravedad y que no cae en línea recta al suelo. La función matemática que describe su trayectoria es una parábola.

partícula *f* Representación esquemática de un objeto o de un cuerpo como un punto en el espacio.

periodo *m* Tiempo que tarda en completarse un ciclo en un movimiento oscilatorio. Es la magnitud inversa de la frecuencia.
sbl ***T***

peso *m* Fuerza sobre un cuerpo debida a la atracción gravitatoria de la Tierra.

posición *f* Lugar que ocupa una partícula en el espacio.

potencia *f* Ritmo al que se hace o se transfiere energía. Trabajo que se hace o energía que se transforma por unidad de tiempo. Se mide en vatios.

primera ley de Newton *f* Ley que afirma que todo cuerpo continúa en el estado de reposo o de movimiento en línea recta y a velocidad constante, si no actúa sobre él ninguna fuerza neta que cambie su movimiento.
sin. **ley de inercia**

proporcionalidad *f* Condición por la que el cociente de dos magnitudes a/b es constante para cualquier valor de las magnitudes a y b.

resultante *f* Vector resultado de la suma o combinación de dos o más vectores.

rotación *f* Movimiento de un objeto que gira sobre un eje que habitualmente está localizado dentro del objeto y que pasa por su centro de masas.

s *m* Símbolo de segundo.

segunda ley de Newton *f* Ley que afirma que la aceleración que produce una fuerza neta sobre un cuerpo es directamente proporcional a la intensidad de la fuerza neta, tiene la misma dirección y sentido que la fuerza neta y es inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

segundo *m* Unidad fundamental de tiempo del Sistema Internacional.
sbl **s**

SI *m* Véase **Sistema Internacional**.

sistema *m* Conjunto de partículas, de objetos o de cuerpos.

sistema de referencia *m* Punto de observación y sistema de ejes de coordenadas desde el que puede describirse la posición y el movimiento de una partícula.

sistema de referencia inercial *m* Sistema de referencia en el que las leyes de Newton se cumplen de manera exacta.

Sistema Internacional *m* Sistema de unidades de medida aceptado en casi todo el mundo y, especialmente, entre los científicos y los ingenieros.
sigla **SI**

tangente *f* Línea que toca una curva sólo en un punto.

teorema trabajo-energía cinética *m* Teorema que afirma que el trabajo que hace una fuerza que actúa sobre un objeto es igual a la energía cinética que gana el objeto.

tercera ley de Newton *f* Ley que afirma que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, el segundo cuerpo ejerce una fuerza igual y contraria sobre el primero. Cualquier fuerza de acción tiene una reacción igual y opuesta.
sin. **ley de acción y reacción**

trabajo *m* Producto de la fuerza que actúa sobre un objeto y la distancia que se mueve en la dirección de la fuerza aplicada.

vatio *m* Unidad de medida de potencia del Sistema Internacional, equivalente a la potencia que se desarrolla cuando se hace un trabajo de un julio en un segundo, 1 W = 1 J/s.
sbl **W**

vector *m* Representación de una magnitud vectorial mediante una flecha que indica su dirección y sentido. La longitud de la flecha representa el valor de la magnitud. El punto de donde parte la flecha indica el punto en el que está aplicada la magnitud.

vectorial *adj* Magnitud física que se representa con un vector y, por lo tanto, tiene módulo, dirección y sentido. Son ejemplos de magnitudes vectoriales la fuerza, la velocidad o la aceleración.

velocidad *f* Distancia recorrida sobre la trayectoria por unidad de tiempo. Tiene también una dirección y un sentido.

velocidad instantánea *f* Velocidad en cualquier instante de tiempo.

velocidad media *f* Distancia recorrida por unidad de tiempo en un intervalo de tiempo.

velocidad relativa *f* Velocidad que tiene un objeto respecto a otro.

vibración *f* Véase **oscilación**.

W *m* Símbolo de **vatio**.

Bibliografía

Bibliografía utilizada

En la elaboración de estos materiales se ha utilizado, principalmente, la bibliografía siguiente:

Arons, A. B. (1990). *A guide to Introductory Physics Teaching.* Nueva York: Wiley & sons.

Becerra Labra, C. (2004). *La enseñanza de la mecánica newtoniana con una estructura problematizada en el primer curso universitario: Efectos sobre el clima del aula, el aprendizaje conceptual y la capacidad para la resolución de problemas.* Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Becerra Labra, C.; Gras Martí, A.; Martínez Torregrosa, J. (2004). "Análisis de la resolución de problemas de física en secundaria y primer curso universitario en Chile". *Enseñanza de las Ciencias* (22, núm. 2, pàg. 275-285).

Domènech, J. L. (2000). *L'ensenyament de l'energia en l'educació secundària. Anàlisi de les dificultats i una proposta de millora.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Giancoli, D. C. (1995). *Physics: Principles with Applications*. Pearson.

Landau, L.; Ajiezer, A.; Lifshitz, E. (1979). *Curso de Física General*. Editorial Mir.

López-Gay, R. (2001). *La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la Física.* Tesis doctoral: Universidad Autónoma de Madrid.

Martínez Sancho, V. (1991). *Fonaments de física*. Barcelona: Enciclopèdia Catalana, cop.

McDermott, L. C.; Schaffer, P. S. (1998). *Tutorials in introductory Physics and homework manual package.* Nueva York: Pearson Education.

Mosca, G.; Kyker, G. C. (1991). *Study Guide to accompany Paul A. Tipler - Physics for Scientists and Engineers.* Nueva York: Worth Publishers.

Price, K.; Kelly, G. (2000). *Success at AQA AS*, Oxford: Oxford University Press.

Bibliografía recomendada

El estudiante que quiera profundizar en algunos de los temas tratados en esta parte de la asignatura, o que desee hacer más ejercicios, puede consultar alguno de los muchos textos de física general que existen en cualquier biblioteca universitaria. Por mencionar alguno, citaremos el de Tipler:

Tipler, P. A. (1985). *Física* (2.ª ed., 1991 reimp.). Barcelona: Editorial Reverté.

Algunas lecturas que os pueden ayudar a entender la mecánica sin ayuda de fórmulas:

Hewitt, P. G. (2007). *Conceptual Physics.* Addison-Wesley.

Webgrafía

Los temas de mecánica se tratan en un gran número de páginas web, tanto con hipertextos digitales como con simulaciones de procesos. No tendréis ningún problema para encontrarlas con una sencilla búsqueda por Internet.

Por comentar sólo algunas:

- Animaciones de física y matemàticas del prof. D. Harrison, traducidas al catalán, en: http://www.meet-physics.net/David-Harrison/index_spa.html.
- Un conjunto de animaciones diversas, Inspire, d'EUN (European Schoolnet): http://ca.inspire.eun.org/index.php/P%C3%A0gina_principal.
- Podéis también consultar un curso completo de física por Internet, con centenares de animaciones y simulaciones, del prof. Ángel Franco: *Curso Interactivo de Física en Internet*: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/